Astérisque
323, 2009, p. 197–221

UN THÉORÈME DE TYPE HAEFLIGER DÉFINISSABLE

par

Jean-Marie Lion & Patrick Speissegger

À José Manuel Aroca, pour ses soixante ans

Résumé. — Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété définissable dans une structure o-minimale $\mathcal{A}$ et soit $\omega \in \Lambda(M)$ une 1-forme différentielle $\mathcal{A}$-définissable. Nous montrons que si ω définit un feuilletage de codimension un sur M alors il existe un recouvrement fini de M par des ouverts $\mathcal{A}$-définissables $M_1, \ldots, M_r$ qui vérifient la propriété suivante : pour chaque i, tout lacet C^1 inclus dans M_i est tangent à $\ker(\omega)$ en un point.

***Abstract* (Definisable Haefliger's Type Theorem).** — Let $\mathcal{A}$ be an o-minimal expansion of the real field, M a submanifold of R^n and ω a differentiable 1-form on M. We assume that M and ω are definable in $\mathcal{A}$ and ω defines a foliation on M of codimension one. Then there are definable, open subsets M_i of M, for $i = 1, \ldots, r$, such that every C^1 loop contained in M_i is tangent to $\ker(\omega)$ at some point.

Introduction

Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété différentielle de classe $C^k, k \geq 2$, de dimension m, connexe et $\omega \in \Lambda^k(M)$ une 1-forme différentielle de clase C^k définie sur M. On suppose que ω est *non singulière et intégrable* : en tout point x de M

$$\omega(x) \neq 0 \text{ et } \omega \wedge d\omega(x) = 0.$$

D'après le théorème de Frobenius, pour tout point x de M il existe une carte locale de M centrée en x dans laquelle le champ d'hyperplans $\ker(\omega)$ est le champ $\ker(dx_m)$. Par conséquent, la forme ω définit sur M un *feuilletage de codimension un* noté $\mathcal{F}$. Par tout point x de M passe une unique *feuille* V de $\mathcal{F}$. C'est une hypersurface de classe C^k, connexe, immergée injectivement dans M, tangente au champ d'hyperplans $x \in M \mapsto \ker(\omega)(x)$ et maximale pour ces propriétés (voir **[4]**, **[14]** ou **[16]** pour une introduction à la théorie des feuilletages).

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 14P10, 58A17; 03C99.
Mots clefs. — Structure o-minimale, feuilletage.

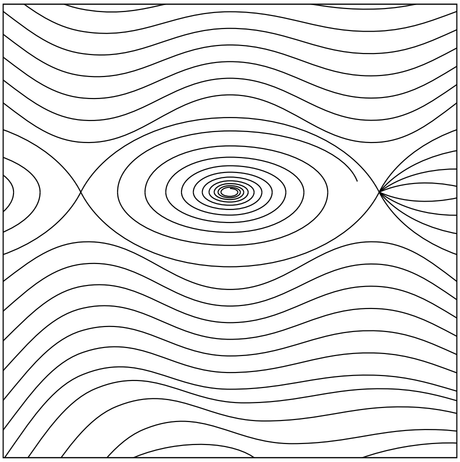

FIGURE 1. Un feuilletage du carré privé de trois points

Observons que si la condition d'intégrabilité de Frobenius n'est pas vérifiée alors d'une part il n'y aurait pas de feuilletage et d'autre part il existerait nécessairement des lacets transverses au champ $\ker(\omega)$. Ce dernier point est une conséquence immédiate du théorème de Darboux sur les modèles locaux des formes différentielles (voir par exemple [**13**]).

Les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$ ne sont pas toujours fermées ou plongées proprement dans M et elles peuvent être denses. Cependant si M est une variété analytique simplement connexe et ω est analytique, alors, d'après un théorème d'A. Haefliger [**15**] (voir aussi [**23**]), le feuilletage *n'admet pas de transversale fermée* (ceci signifie qu'il n'existe pas dans M de lacet de classe C^1 et transverse au feuilletage) et toute feuille est une hypersurface analytique fermée de M qui sépare M en deux composantes connexes. En particulier toute feuille est de *Rolle* : tout lacet différentiable qui la rencontre est tangent au feuilletage en un point (voir [**17**] et [**23**]). Si la simple connexité de M joue un rôle important dans la preuve du théorème de A. Haefliger, l'analyticité de M et celle de ω sont aussi essentielles. Elles garantissent l'analyticité des holonomies. Un exemple de G. Reeb [**11**] montre qu'on ne peut s'affranchir totalement des hypothèses d'analyticité et de simple connexité (voir [**4**] ou [**14**]).

Dans [**26**], C.A. Roche conjecture qu'il est possible de recouvrir M par un nombre fini d'ouverts $M_1, \ldots, M_s$ tels que sur chaque M_i la forme ω induit un feuilletage $\mathcal{F}_i$ dynamiquement simple : il n'admet pas de transversale fermée et toute feuille est une hypersurface fermée de M_i qui sépare M_i en deux composantes connexes.

L'objet de cet article est de donner une réponse positive à cette conjecture dans un cadre assez général, le cadre o-minimal [**8**] (voir aussi [**10**] ou [**31**]).

Théorème 1. — *Si M et ω sont définissables dans une structure o-minimale $\mathcal{A}$, il existe un recouvrement fini $M_1, \ldots, M_s$ de M par des ouverts $\mathcal{A}$-définissables tel que* *la forme ω induit sur chaque M_i un feuilletage $\mathcal{F}_i$ dynamiquement simple : il n'admet pas de transversale fermée et toute feuille est une hypersurface fermée de M_i qui sépare M_i en deux composantes connexes.*

Cette réponse positive à la conjecture de Roche a la conséquence dynamique suivante : un espace feuilleté par un champ d'hyperplans définissable dans une structure o-minimale se décompose en *un ensemble fini de régions avec un comportement dynamique uniforme* [**26**].

D'après les résultats de [**6**] adaptés au cadre o-minimal, pour chaque i le feuilletage $\mathcal{F}_i$ est *presque* une C^k-fibration triviale : c'est le cas dans les composantes connexes de $M_i \setminus Z_i$ où Z_i est la réunion d'un nombre fini de feuilles de $\mathcal{F}_i$. De plus, d'après [**30**], les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_i$ sont définissables dans une structure o-minimale, la clôture pfaffienne de $\mathcal{A}$. Ainsi le théorème, combiné à [**30**], pourrait être une source de nouveaux exemples de structures o-minimales.

Notre théorème est une généralisation du théorème 1 de [**20**] dans laquelle on s'affranchit de toute condition d'analyticité. On sait que les techniques de désingularisation des ensembles analytiques (présentées par exemple dans l'article de J.M. Aroca, H. Hironaka et J.L. Vicente [**1**]) appliquées à l'étude des feuillletages analytiques singuliers de codimension un et à celle des champs de vecteurs analytiques peuvent se révéler très fructueuses (voir par exemple [**5**] ou [**25**]). Ici, il faudra se résoudre à des méthodes plus naïves de nature essentiellement topologique et différentielle : l'idée principale, déja présente dans [**20**], est de construire un recouvrement fini de M par des ouverts M_i sur chacun desquels la forme ω induit un feuilletage dont les feuilles sont des graphes d'applications.

Après une présentation des structures o-minimales (partie 1) nous donnerons trois observations topologiques et une proposition utiles à la preuve du théorème (partie 2). Ensuite (partie 3) nous énoncerons une proposition qui permet de recouvrir l'espace en ouverts sur lesquels la dynamique du feuilletage se révèlera simple ou au moins contrôlée par la dynamique de feuilletages induits sur certaines parties de leurs bords. La preuve de cette proposition, purement technique, sera donnée en annexe (partie 5). Elle se conclut par un argument de transversalité de Thom [**32**]. Dans la partie 3 on donnera aussi un exemple qui illustre la nécessité du contrôle de la dynamique au bord. La partie 4 sera consacrée à la preuve du théorème.

Les auteurs remercient les rapporteurs pour leurs suggestions et Laurent Moret-Bailly pour sa relecture attentive.

Les dessins ont été réalisés à l'aide du logiciel *Fig4TEX* développé par Yvon Lafranche et Daniel Martin.

1. Les structures o-minimales (voir [8] ou [10])

Définition 1.1. — On appelle *structure* une famille $\mathcal{A} = \cup_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{A}_n$ de sous-ensembles des espaces euclidiens $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

– si $X, Y \in \mathcal{A}_n$ alors $X \cap Y$, $X \cup Y$ et $X \setminus Y$ appartiennent à $\mathcal{A}_n$

– si $X \in \mathcal{A}_n$ et $Y \in \mathcal{A}_m$ alors $X \times Y \in \mathcal{A}_{n+m}$
– si $Z \in \mathcal{A}_{n+m}$ alors $\{x \in \mathbf{R}^n | \exists y \in \mathbf{R}^m, (x,y) \in Z\} \in \mathcal{A}_n$
– si $P \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ alors $\{P > 0\} \in \mathcal{A}_n$.

Définition 1.2. — Suivant la terminologie introduite par L. van den Dries [**8**] la structure $\mathcal{A}$ est dite *o-minimale* si les éléments de $\mathcal{A}_1$ sont les unions finies d'intervalles et de points.

D'après le théorème de Tarski-Seidenberg (voir par exemple [**3**] ou [**2**]) les semi-algébriques forment une structure o-minimale. S. Łojasiewicz montre que les semi-analytiques possèdent de nombreuses propriétés de régularité (stratifications de Whitney, triangulations, ordre de contact, voir [**21**]) mais ils ne forment pas une structure o-minimale. Cependant d'après un théorème de A. Gabrielov [**12**] les sous-ensembles semi-analytiques relativement compacts en engendrent une. On connaît depuis la fin des années 80 de nombreux autres exemples de structures o-minimales (voir par exemple [**9**], [**35**], [**29**], [**28**]). L'article [**29**] montre en particulier qu'il n'existe pas une structure o-minimale maximale qui engloberait toutes les autres et que certaines structures o-minimales sont très éloignés des ensembles analytiques.

Considérons une structure o-minimale $\mathcal{A}$. Les éléments des $\mathcal{A}_n$ sont appelés *ensembles $\mathcal{A}$-définissables.* Une fonction ou une application est dite *$\mathcal{A}$-définissable* si son graphe est $\mathcal{A}$-définissable. Une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ est dite *$\mathcal{A}$-définissable* si c'est un élément de $\mathcal{A}_n$. Une forme différentielle est dite *$\mathcal{A}$-définissable* si son graphe est $\mathcal{A}$-définissable. Les grassmanniennes $\mathcal{G}_n^p$ des p-plans de $\mathbf{R}^n$ et leur réunion $\mathcal{G}_n$ sont des sous-ensembles semi algébriques. Elles sont donc $\mathcal{A}$-définissables. Les trois propositions suivantes récapitulent des propriétés élémentaires mais fondamentales des structures o-minimales.

Proposition 1 **(Propriétés ensemblistes)**

– *La composée d'applications $\mathcal{A}$-définissables l'est aussi.*
– *Si $f : X \to \mathbf{R}$ est $\mathcal{A}$-définissable alors $\{f = 0\}$, $\{f > 0\}$ et $\{f < 0\}$ le sont aussi.*
– *Si $f : X \to \mathbf{R}^m$ et $Y \subset \mathbf{R}^m$ sont $\mathcal{A}$-définissables alors $f^{-1}(Y)$ l'est aussi.*

Proposition 2 **(Propriétés topologiques)**

– *Si X est $\mathcal{A}$-définissable alors son adhérence $\overline{X}$ et son intérieur $\mathrm{Int}(X)$ le sont aussi.*

Proposition 3 **(Propriétés différentielles)**

– *Les dérivées partielles d'une application différentiable et $\mathcal{A}$-définissable sont $\mathcal{A}$-définissables.*
– *Si X est une sous-variété de dimension p de $\mathbf{R}^n$, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable alors son fibré tangent est aussi $\mathcal{A}$-définissable.*

– *Si* $\alpha : X \to \mathcal{G}_n^p$ *et* $\beta : X \to \mathcal{G}_n^q$ *sont deux applications* $\mathcal{A}$*-définissables alors les ensembles* $\{\alpha \subset \beta\}$ *et* $\{\dim(\alpha \cap \beta) = d\}, d = 1, \ldots, n$ *ainsi que l'application* $\alpha \cap \beta$ *à valeurs dans* $\mathcal{G}_n$ *le sont aussi.*
– *Si* X *est une sous-variété de* $\mathbf{R}^n$ $\mathcal{A}$*-définissable et* $\omega \in \Lambda(X)$ *est une 1-forme différentielle* $\mathcal{A}$*-définissable alors l'application* $\ker(\omega)$ *l'est aussi.*

Les structures o-minimales possèdent la propriété de finitude uniforme suivante (voir [**8**], [**10**]).

Proposition 4. — *Si* $X \subset \mathbf{R}^n$ *est* $\mathcal{A}$*-définissable il existe un entier* N *qui majore le nombre de composantes connexes de* $X \cap E$ *pour tout sous-espace affine* E *de* $\mathbf{R}^n$.

Définition 1.3. — Soit $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On définit par récurrence sur n les *cylindres de* $\mathbf{R}^n$ *de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissables.* L'unique cylindre de $\mathbf{R}^0 = \{0\}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable est $\mathbf{R}^0$ lui même. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et supposons avoir défini les cylindres de $\mathbf{R}^{n-1}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissables. Un sous-ensemble C de $\mathbf{R}^n$ est un *cylindre de* $\mathbf{R}^n$ *de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable* si les conditions suivantes sont vérifiées.

– L'ensemble C est une sous-variété différentielle de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable.
– Il existe un cylindre D de $\mathbf{R}^{n-1}$ de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable tel que soit C est le graphe d'une fonction de D dans $\mathbf{R}$, de classe C^k et $\mathcal{A}$-définissable, soit

$$C = D \times \mathbf{R}$$

ou
$$C = \{(x, y) : x \in D, \phi(x) < y < \psi(x)\}$$

ou
$$C = \{(x, y) : x \in D, \phi(x) < y\}$$

ou
$$C = \{(x, y) : x \in D, y < \psi(x)\}$$

avec ϕ et ψ des fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbf{R}$ de classe C^k, $\mathcal{A}$-définissables et telles que $\phi < \psi$. Le cylindre D est appelé *base* de C.

On déduit de cette définition les propositions suivantes.

Proposition 5. — *Si* C *est un cylindre de* $\mathbf{R}^n$*, de classe* C^k*,* $\mathcal{A}$*-définissable et de base* D *et si* D' *est un cylindre de* $\mathbf{R}^{n-1}$ *de classe* C^k*,* $\mathcal{A}$*-définissable et inclus dans* D *alors* $C \cap (D' \times \mathbf{R})$ *est un cylindre de* $\mathbf{R}^n$*, de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable.*

Proposition 6. — *Si* C *est un cylindre de dimension* d *de* $\mathbf{R}^n$ *de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable alors quitte à permuter les coordonnées, le cylindre* C *est le graphe d'une application définie sur un cylindre ouvert* D' *de* $\mathbf{R}^d$*, à valeurs dans* $\mathbf{R}^{n-d}$*, de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable. De plus il existe un difféomorphisme de* $\mathbf{R}^d$ *dans* D'*, de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable. Ainsi* C *est connexe et il existe un difféomorphisme de* $\mathbf{R}^d$ *dans* C*, de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable.*

Définition 1.4. — Soit $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On définit par récurrence sur n les *décompositions cylindriques de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissables.* L'unique *décomposition cylindrique de* $\mathbf{R}^0 = \{0\}$ *de classe* C^k *et* $\mathcal{A}$*-définissable* est $\mathbf{R}^0$ lui même. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et supposons avoir défini les décompositions cylindriques de $\mathbf{R}^{n-1}$ de classe C^k et