

LA SÉRIE PRINCIPALE UNITAIRE DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

par

Pierre Colmez

Résumé. — Cet article s’inscrit dans le cadre de la correspondance de Langlands locale p -adique pour la série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Nous utilisons la théorie des (φ, Γ) -modules de Fontaine pour établir, dans les cas semi-stable et non géométrique, un lien direct entre (le dual de) la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et le (φ, Γ) -module associés à la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Abstract (The unitary principal series of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$). — This paper is devoted to the p -adic local Langlands correspondence for the unitary principal series of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. We use Fontaine’s theory of (φ, Γ) -modules to establish, in the semistable and non geometric cases, a direct link between the (dual of the) representation of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and the (φ, Γ) -module attached to the representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Introduction

Cet article est une fusion partielle de [22] et [23] qui sont destinés à rester inédits. Certaines questions qui y sont soulevées sont traitées dans [29]; quand c’est le cas, ceci est indiqué par une note de bas de page.

0.1. Notations. — Soit $p \geq 3$ un nombre premier⁽¹⁾. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de \mathbf{Q}_p , et on note $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de \mathbf{Q}_p et $W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ son groupe de Weil (qui est dense dans $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\mathrm{deg}(g) \in \mathbf{Z}$ l’entier défini par $g(x) = x^{p^{\mathrm{deg}(g)}}$ si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$.

Soit $\chi : \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p} \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Si $F_\infty = \mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})$, le noyau \mathcal{H} de χ est aussi égal à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$, ce qui permet de voir χ aussi comme un isomorphisme de $\Gamma = \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ sur \mathbf{Z}_p^* . Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on note σ_a l’élément de Γ défini par $\chi(\sigma_a) = a$.

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F** , 11S**.

Mots clefs. — Série principale, représentation unitaire, correspondance de Langlands locale.

⁽¹⁾ L’extension à $p = 2$ ne devrait pas poser de problèmes autres que rédactionnels...

Dans tout l'article, L désigne une extension finie de \mathbf{Q}_p , d'anneau des entiers \mathcal{O}_L et de corps résiduel k_L . Soit $\widehat{\mathcal{F}}(L)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow L^*$. La notation est justifiée par le fait que $\widehat{\mathcal{F}}(L)$ est l'ensemble des points L -rationnels d'une variété analytique $\widehat{\mathcal{F}}$. On note juste $x \in \widehat{\mathcal{F}}(L)$ le caractère induit par l'inclusion de \mathbf{Q}_p dans L , et $|x|$ le caractère envoyant $x \in \mathbf{Q}_p^*$ sur $p^{-v_p(x)}$. Si $\delta \in \widehat{\mathcal{F}}(L)$, on note $w(\delta)$ son poids, défini par $w(\delta) = \frac{\log \delta(u)}{\log u}$, où $u \in \mathbf{Z}_p^*$ n'est pas une racine de l'unité.

L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\text{ab}}$ de $W_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à \mathbf{Q}_p^* d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathcal{F}}(L)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathcal{F}}(L)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)} \delta(\chi(g)).$$

Si δ est unitaire (i.e. si $v_p(\delta(p)) = 0$), alors δ se prolonge par continuité à $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $w(\delta)$ est alors le poids de Hodge-Tate généralisé de la représentation $L(\delta)$ de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ définie par δ . Par exemple $x|x|$, qui est unitaire, correspond au caractère cyclotomique χ ; son poids est 1.

0.2. L'espace des paramètres \mathcal{S}_{irr} . — On note (δ_1, δ_2) un élément générique de $\widehat{\mathcal{F}} \times \widehat{\mathcal{F}}$, et on définit \mathcal{S} comme la variété analytique obtenue en éclatant $\widehat{\mathcal{F}} \times \widehat{\mathcal{F}}$ le long des sous-variétés $\delta_1 \delta_2^{-1} = x^i |x|$, pour i entier ≥ 1 , et des variétés $\delta_1 \delta_2^{-1} = x^{-i}$, pour i entier ≥ 0 . On a donc une projection de \mathcal{S} sur $\widehat{\mathcal{F}} \times \widehat{\mathcal{F}}$ dont les fibres sont en général réduites à un point et isomorphes à \mathbf{P}^1 dans le cas contraire. On note un élément générique s de $\mathcal{S}(L)$ sous la forme $s = (\delta_1, \delta_2, \mathcal{L})$, où $\mathcal{L} = \infty \in \mathbf{P}^0(L)$ si la fibre au-dessus de (δ_1, δ_2) est réduite à un point, et $\mathcal{L} \in \mathbf{P}^1(L)$ sinon.

On note \mathcal{S}_+ le fermé de \mathcal{S} constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0 \quad \text{et} \quad v_p(\delta_1(p)) \geq 0.$$

Si $s \in \mathcal{S}_+(L)$, on associe à s les invariants $u(s) \in \mathbf{Q}_+$ et $w(s) \in L$ définis par

$$u(s) = v_p(\delta_1(p)) = -v_p(\delta_2(p)) \quad \text{et} \quad w(s) = w(\delta_1) - w(\delta_2).$$

On partitionne \mathcal{S}_+ sous la forme $\mathcal{S}_+ = \mathcal{S}_+^{\text{ng}} \amalg \mathcal{S}_+^{\text{cris}} \amalg \mathcal{S}_+^{\text{st}} \amalg \mathcal{S}_+^{\text{ord}} \amalg \mathcal{S}_+^{\text{ncl}}$, où

- $\mathcal{S}_+^{\text{ng}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier ≥ 1 ;
- $\mathcal{S}_+^{\text{cris}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier ≥ 1 , $u(s) < w(s)$ et $\mathcal{L} = \infty$;
- $\mathcal{S}_+^{\text{st}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier ≥ 1 , $u(s) < w(s)$ et $\mathcal{L} \neq \infty$;
- $\mathcal{S}_+^{\text{ord}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier ≥ 1 , $u(s) = w(s)$;
- $\mathcal{S}_+^{\text{ncl}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier ≥ 1 , $u(s) > w(s)$.

Remarque 0.1. — Les exposants « ng », « cris », « st », « ord » et « ncl » sont respectivement censés faire penser à « non géométrique », « cristalline », « semi-stable », « ordinaire » et « non classique ». Cette terminologie vient de la classification des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires surconvergentes.

On partitionne aussi \mathcal{S}_+ sous la forme $\mathcal{S}_+ = \mathcal{S}_0 \amalg \mathcal{S}_*$, où

- \mathcal{S}_0 est l'ensemble des s tels que $u(s) = 0$;

• \mathcal{S}_* est l'ensemble des s tels que $u(s) > 0$.

Si $\text{truc} \in \{\text{ng, cris, st, ord, ncl}\}$ et $\text{machin} \in \{+, 0, *\}$, on note $\mathcal{S}_{\text{machin}}^{\text{truc}}$ l'intersection de $\mathcal{S}^{\text{truc}}$ et $\mathcal{S}_{\text{machin}}$. En particulier, les ensembles $\mathcal{S}_0^{\text{ord}}$ et $\mathcal{S}_0^{\text{ncl}}$ sont vides.

Finalement, on pose $\mathcal{S}_{\text{irr}} = \mathcal{S}_*^{\text{ng}} \amalg \mathcal{S}_*^{\text{cris}} \amalg \mathcal{S}_*^{\text{st}}$.

Remarque 0.2. — L'application $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \mapsto s' = (x^{w(s)}\delta_2, x^{-w(s)}\delta_1, \infty)$ est une involution de \mathcal{S}_*

0.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — Si $\mathcal{L} \in L$, on note $\log_{\mathcal{L}}$ le logarithme normalisé par $\log_{\mathcal{L}} p = \mathcal{L}$, et si $\mathcal{L} = \infty$, on définit $\log_{\mathcal{L}}$ par $\log_{\infty} = v_p$; on a donc $\log_{\infty}(x) = \lim_{\mathcal{L} \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \log_{\mathcal{L}}(x)$.

Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathcal{L}) \in \mathcal{S}_+$, on note δ_s le caractère $(x|x|)^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}$. Remarquons que, si $s \in \mathcal{S}_*$, on ne peut avoir $\mathcal{L} \neq \infty$ que si δ_s est de la forme x^i , avec $i \in \mathbf{N}$. On associe à s les représentations $B(s)$, $M(s)$ et $\Pi(s)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ définies de la manière suivante.

$B(s)$ est l'ensemble des $\phi : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$ de classe⁽²⁾ $\mathcal{C}^{u(s)}$ telles que $x \mapsto \delta_s(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^{u(s)}$ en 0. L'action de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est donnée par la formule

$$(\phi \star_s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(x) = (x|x|\delta_1^{-1})(ad - bc) \delta_s(cx + d) \phi\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right).$$

Si δ_s n'est pas de la forme x^i , avec $i \in \mathbf{N}$, on prend pour $M(s)$ l'espace vectoriel engendré par 1, et les $\delta_s(x - a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$.

Si $\delta_s = x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, on note $M(s)$ l'intersection avec $B(s)$ de l'espace vectoriel engendré par les $\delta_s(x - a)$ et les $\delta_s(x - a) \log_{\mathcal{L}}(x - a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$.

Finalement, si $s \in \mathcal{S}_*$, on pose $\Pi(s) = B(s)/\widehat{M(s)}$, où $\widehat{M(s)}$ désigne l'adhérence de $M(s)$ dans $B(s)$.

Remarque 0.3. — Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathcal{L}) \in \mathcal{S}_0$, on a $M(s) = 0$, mais il ne semble pas qu'il faille prendre $\Pi(s) = B(s)$ si on veut étendre la correspondance de Langlands p -adique aux représentations de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui ne sont pas irréductibles. En fait, le cas des représentations ordinaires (cf. [11]) suggère que le bon espace à considérer pour $\Pi(s)$ doit être une extension⁽³⁾ de $B(s)$ par $B(s')$, où $s' = (\delta_2, \delta_1, \mathcal{L})$.

Compte-tenu de la remarque ci-dessus, nous nous restreindrons au cas $s \in \mathcal{S}_*$. L'énoncé ci-dessous est maintenant démontré sauf dans la cas où $s \in \mathcal{S}^{\text{cris}}$ et la représentation de Weil-Deligne associée n'est pas semi-simple, dit *cas exceptionnel*.

⁽²⁾ Rappelons [27] que ϕ est de classe \mathcal{C}^u si $\phi(a + x)$ a un développement limité à l'ordre $[u]$ en tout a , et si le reste est $o(|x|^u)$, uniformément (en a) sur tout compact. L'application qui à $\phi \in B(s)$ associe les restrictions de ϕ et $\delta_s(x)\phi(1/x)$ à \mathbf{Z}_p et $p\mathbf{Z}_p$ est un isomorphisme de $B(s)$ sur $\mathcal{C}^{u(s)}(\mathbf{Z}_p) \oplus \mathcal{C}^{u(s)}(p\mathbf{Z}_p)$, ce qui munit $B(s)$ d'une structure de L -banach.

⁽³⁾ C'est effectivement ce que donne la construction de [29].

Théorème 0.4. — (i) Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathcal{L}) \in \mathcal{S}_*$, alors $\Pi(s) \neq 0$ et est unitaire sauf si $s \in \mathcal{S}_*^{\text{ncl}}$. De plus,

- si $s \in \mathcal{S}_{\text{irr}}$, alors $\Pi(s)$ est irréductible et admissible,
- si $s \in \mathcal{S}_*^{\text{ord}} \amalg \mathcal{S}_*^{\text{ncl}}$, alors $\Pi(s)$ n'est pas irréductible : $(\frac{d}{dx})^{w(s)}$ induit un morphisme $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant de $B(s)$ dans $B(s')$, où $s' = (x^{-w(s)}\delta_1, x^{w(s)}\delta_2, \mathcal{L})$, tuant $M(s)$, et $\Pi(s)$ est une extension de $B(s')$ par l'adhérence de l'image des fonctions localement polynomiales de degré $< w(s)$ dans $\Pi(s)$.

(ii) Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathcal{L})$ et $s' = (\delta'_1, \delta'_2, \mathcal{L}')$ sont deux éléments distincts de \mathcal{S}_{irr} , alors il existe un morphisme $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant non nul $\Pi(s) \rightarrow \Pi(s')$ si et seulement si $s, s' \in \mathcal{S}_*^{\text{cris}}$ et $\delta'_1 = x^{w(s)}\delta_2$, $\delta'_2 = x^{-w(s)}\delta_1$.

Remarque 0.5. — (i) Il semble difficile de démontrer le th. 0.4 directement, et la démonstration dont on dispose passe par les (φ, Γ) -modules attachés aux représentations triangulines de dimension 2 (cf. th. 0.6). Elle établit en même temps une correspondance de Langlands locale p -adique pour ces représentations.

(ii) Breuil [8] a démontré une bonne partie du (i) pour $s \in \mathcal{S}_*^{\text{cris}}$ et $w(s)$ petit ($w(s) \leq 2p$), en calculant la réduction modulo p de $\Pi(s)$. Par la même méthode (mais avec des calculs nettement plus compliqués), Breuil et Mézard [12] ont démontré une bonne partie du (i) pour $s \in \mathcal{S}_*^{\text{st}}$ et $w(s)$ petit ($w(s) \leq p - 1$). Leur calculs suggèrent une compatibilité⁽⁴⁾ entre la correspondance en caractéristique 0 et celle en caractéristique p (cf. [7]) et laissent entrevoir la possibilité d'obtenir une réalisation géométrique de la correspondance de Langlands locale p -adique analogue à celle obtenue par Harris et Taylor [36] (cf. aussi [34]) dans le cas classique.

(iii) Breuil [9, 10] a démontré une bonne partie du point (i) dans le cas d'une représentation semi-stable associée à une forme modulaire f . Il a en fait démontré que la représentation $\Pi(s)$ intervient dans le morceau correspondant à f dans le complété p -adique de la cohomologie de la tour des courbes modulaires, si et seulement si s est le paramètre correspondant à la représentation⁽⁵⁾ de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ attachée à f via la correspondance ci-dessus, ce qui tend à indiquer que cette correspondance est compatible avec une correspondance de Langlands p -adique globale qui reste à définir⁽⁶⁾.

0.4. Représentations triangulines de dimension 2. — Fontaine a établi une équivalence de catégories entre les L -représentations de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et les (φ, Γ) -modules étales sur le corps⁽⁷⁾ \mathcal{E} . Cette équivalence de catégories a été complétée [13, 40], par la suite, par des équivalences de catégories entre les (φ, Γ) -modules étales sur \mathcal{E} , \mathcal{E}^\dagger et \mathcal{R} .

Grâce à ces équivalences de catégories, on construit [25], pour tout $s \in \mathcal{S}_* - \mathcal{S}_*^{\text{ncl}}$, une L -représentation $V(s)$ de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La construction de $V(s)$ passe

⁽⁴⁾ Cette compatibilité est une des constituantes de la correspondance de [29].

⁽⁵⁾ C'est la restriction à $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de la représentation de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ construite par Deligne [30].

⁽⁶⁾ La correspondance globale modulo p , pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$, n'est autre que la conjecture de Serre ; pour la p -adique, le lecteur est renvoyé à [11, 32, 33].

⁽⁷⁾ Cf. n° I.1 pour la construction des corps \mathcal{E} , \mathcal{E}^\dagger et de l'anneau \mathcal{R} .

par celle du (φ, Γ) -module étale sur \mathcal{R} qui lui correspond, duquel on déduit le (φ, Γ) -module $D(s)^\dagger$, étale sur \mathcal{E}^\dagger , attaché à $V(s)$, puis $D(s) = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} D(s)^\dagger$, le (φ, Γ) -module étale sur \mathcal{E} , correspondant à $V(s)$ via l'équivalence de catégories de Fontaine.

Par ailleurs, un (φ, Γ) -module étale D sur \mathcal{E}^\dagger est muni d'un inverse à gauche ψ de φ commutant à l'action de Γ . L'ensemble $(D^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, des suites bornées⁽⁸⁾ $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbf{Z}}$ de D vérifiant $\psi(x^{(n+1)}) = x^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, est alors muni d'une action naturelle [28, § III.2] du sous-groupe mirabolique $P(\mathbf{Q}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{Q}_p^*, b \in \mathbf{Q}_p \right\}$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Le lien entre $\Pi(s)$ et $V(s)$ est donné par le résultat suivant, où \check{D} désigne le dual de Tate⁽⁹⁾ de D , si D est un (φ, Γ) -module étale sur \mathcal{E} .

Théorème 0.6. — *Si $s \in \mathcal{S}_{\text{irr}}$ n'est pas exceptionnel⁽¹⁰⁾, le module $(\check{D}(s)^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est naturellement isomorphe au dual $\Pi(s)^*$ de $\Pi(s)$ en tant que module sous l'action du mirabolique.*

Remarque 0.7. — (i) Le th. 0.6 permet de démontrer une grande partie du th. 0.4. L'admissibilité de $\Pi(s)$ peut, par exemple, se déduire de [7], en utilisant la compatibilité [2] de la correspondance ci-dessus avec la correspondance de Langlands locale modulo p . L'irréductibilité et les cas d'isomorphisme peuvent se prouver en extrayant le module $D(s)$ de $(\check{D}^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$. En fait, il résulte de [28, th. 0.4] que $\Pi(s)$ est déjà irréductible comme représentation du mirabolique et de [28, th. 0.6] que $\Pi(s) \cong \Pi(s')$ si et seulement si c'est le cas en restriction au mirabolique.

(ii) On a $\mathcal{S}_{\text{irr}} = \mathcal{S}_*^{\text{ng}} \amalg \mathcal{S}_*^{\text{cris}} \amalg \mathcal{S}_*^{\text{st}}$. Dans cet article on ne traite que les deux cas $s \in \mathcal{S}_*^{\text{st}}$ et $s \in \mathcal{S}_*^{\text{ng}}$ (la méthode permet de traiter aussi la moitié du cas $s \in \mathcal{S}_*^{\text{cris}}$); le lecteur est renvoyé à [4] pour les cas restants. Historiquement, le premier cas à avoir été traité [22] est le cas $s \in \mathcal{S}_*^{\text{st}}$; la démonstration a été adaptée par Berger et Breuil [4] pour traiter le cas où $s \in \mathcal{S}_*^{\text{cris}}$ (à part le cas exceptionnel) qui est particulièrement intéressant car c'est le seul où des isomorphismes non triviaux apparaissent (cf. (ii) du th. 0.4). La démonstration dans le cas $\mathcal{S}_*^{\text{ng}}$ présente de grandes similarités avec celle du cas $s \in \mathcal{S}_*^{\text{st}}$, les nouveautés se trouvant plutôt dans la construction [25] des (φ, Γ) -modules $D(s)$ que dans la construction de l'isomorphisme du théorème 0.6.

(iii) La démonstration dans le cas $s \in \mathcal{S}_*^{\text{st}}$ a été inspirée par un sous-produit du résultat de Breuil [10] mentionné ci-dessus. Si $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n$ est une forme modulaire primitive de poids $k \geq 3$ dont le coefficient a_p vaut $p^{(k-2)/2}$, la représentation V_f de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ qui lui est associée est semi-stable de dimension 2 et de poids de Hodge-Tate 0 et $1 - k$. Elle correspond à un point

⁽⁸⁾ Dans cet article, une suite est bornée si elle est contenue dans un compact.

⁽⁹⁾ Le déterminant de $V(s)$ est $L(\delta_1 \delta_2)$ et comme on est en dimension 2, on a $\check{D}(s) = D(s) \otimes (x|x| \delta_1^{-1} \delta_2^{-1})$.

⁽¹⁰⁾ Le résultat s'étend sûrement au cas exceptionnel, mais cela demanderait à être rédigé.