Astérisque
323, 2009, p. 253–260

UNE PREUVE COMBINATOIRE DU THÉORÈME DE FROBENIUS

par

Robert Moussu & Jean-Philippe Rolin

À notre ami José Manuel

Résumé. — On considère un sous-corps $\mathbb{K}$ du corps des nombres complexes. Nous montrons qu'un système de Pfaff intégrable et non singulier à coefficients dans $\mathbb{K}\{x\}$ admet une famille d'intégrales premières à coefficients dans $\mathbb{K}\{x\}$. Ce résultat reste vrai pour un système singulier de codimension 1. Pour un système singulier de codimension > 1, nous obtenons des intégrales premières formelles à coefficients dans $\mathbb{K}[[x]]$.

***Abstract* (A combinatorial proof of Frobenius theorem).** — Let $\mathbb{K}$ be a subfield of the field of complex numbers. We show that an integrable and non singular Pfaff system with coefficients in $\mathbb{K}\{x\}$ has a family of first integrals with coefficients in $\mathbb{K}\{x\}$. The result remains true for singular system of codimension 1. For a singular system of codimension > 1, we obtain formal first integrals with coefficients in $\mathbb{K}[[x]]$.

1. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Le but de ce travail est de préciser les théorèmes de Frobenius classique et singulier de [**3**] et [**4**], pour des systèmes de formes de Pfaff holomorphes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{K}\{x\}$.

***Théorème 1.0.1* (de Frobenius classique sur $\mathbb{K}$).** — *Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ des germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-formes différentielles à coefficients dans $\mathbb{K}\{x\}$ tels que :*

i) $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \mathrm{d}\omega_i = 0$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, p$.

ii) $\omega_1(0) \wedge \omega_2(0) \wedge \cdots \wedge \omega_p(0) \neq 0$

Alors le système de Pfaff $\Theta = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p\}$ est $\mathbb{K}$-intégrable : il existe $f_i, g_{i,j} \in \mathbb{K}\{x\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, p$, tels que $g_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$ et, pour $i = 1, 2, \ldots, p$:

$$\omega_i = g_{i,1}\mathrm{d}f_1 + g_{i,2}\mathrm{d}f_2 + \cdots + g_{i,p}\mathrm{d}f_p$$

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 34M35; 58A10, 58A30.
Mots clefs. — Feuilletages holomorphes, théorème de Frobenius, algorithme de Godbillon-Vey.

Soit $\omega = a_1 \mathrm{d}x_1 + a_2 \mathrm{d}x_2 + \cdots + a_n \mathrm{d}x_n$ un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme différentielle holomorphe et soit $\operatorname{Sing}\omega$ son lieu singulier, *i.e.* le germe d'ensemble analytique défini par $a_1(x) = a_2(x) = \cdots = a_n(x) = 0$. En précisant certains arguments de [**3**], [**6**] et [**5**], nous déduisons du théorème précédent :

Théorème 1.0.2 **(de Frobenius singulier en codimension 1 sur $\mathbb{K}$)**
Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme différentielle holomorphe à coefficients dans $\mathbb{K}\{x\}$, vérifiant les conditions :
i) $\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$
ii) $\operatorname{codim}(\operatorname{Sing}\omega) \geq 3$.
Alors ω est $\mathbb{K}$-intégrable : il existe deux germes $f, g \in \mathbb{K}\{x\}$ tels que $\omega = g\mathrm{d}f$ avec $g(0) = 0$.

Dans la section 2, nous donnons une preuve constructive du théorème de Frobenius classique formel, via un lemme de Poincaré relatif gradué. Il en résulte que les intégrales premières que nous obtenons appartiennent à $\mathbb{K}[[x]]$. Nous en déduisons, dans la section 3, le théorème de Frobenius classique sur $\mathbb{K}$ en montrant que les intégrales premières « naturelles » appartiennent à $\mathbb{K}\{x\}$. Les deux sections suivantes sont consacrées à des « théorèmes de Frobenius singuliers » sur $\mathbb{K}$ en codimension 1 et en codimension > 1. Dans ce dernier cas, nous obtenons seulement une version formelle (sur $\mathbb{K}$) du théorème principal de [**4**].

2. Théorème de Frobenius formel sur $\mathbb{K}$

Dans la suite, nous notons $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées des points de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{K}\{x\}$ l'anneau des séries convergentes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}[[x]]$ son complété formel. Pour tout entier $r > 0$, $\Omega_r(\mathbb{K})$ (*resp.* $\widehat{\Omega}_r(\mathbb{K})$) désigne le $\mathbb{K}\{x\}$ (*resp.* $\mathbb{K}[[x]]$)-module des r-formes différentielles α à coefficients dans $\mathbb{K}\{x\}$ (*resp.* $\mathbb{K}[[x]]$) :

$$\alpha = \sum a_{i_1, i_2, \ldots, i_r} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_r} \ .$$

Ces modules sont gradués par le degré des coefficients $a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}$; nous écrirons :

$$\alpha = \alpha^0 + \alpha^1 + \cdots + \alpha^k + \cdots \ \text{avec}\ \alpha^k \in \Omega_r^k(\mathbb{K}) \, , \ \widehat{\Omega}_r^k(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega_r^k(\mathbb{K})$$

où $\Omega_r^k(\mathbb{K})$ est l'ensemble des r-formes dont les coefficients sont des polynômes homogènes de $\mathbb{K}[x]$ de degré k. Le $\mathbb{K}[[x]]$-module $\widehat{\Omega}(\mathbb{K})$, somme directe des modules $\Omega_r(\mathbb{K})$, $r = 1, 2, \ldots$, est muni de la différentielle qui prolonge la différentielle usuelle sur $\mathbb{K}[[x]]$. Cette différentielle est compatible avec la graduation $\mathrm{d} : \Omega_r^k \to \Omega_{r+1}^{k-1}$. Cette propriété est essentielle dans toute la suite.

Le but de ce travail étant de prouver des théorèmes de Frobenius sur $\mathbb{K}$, les coordonnées $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont fixées modulo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

***Théorème 2.0.3* (de Frobenius formel sur $\mathbb{K}$).** — *Soit* $\Theta = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p\} \subset \widehat{\Omega}_1(\mathbb{K})$ *vérifiant les conditions :*

i) $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \mathrm{d}\omega_i = 0$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, p$

ii) $\omega_1(0) \wedge \omega_2(0) \wedge \cdots \wedge \omega_p(0) \neq 0$

Alors Θ *est formellement intégrable sur* $\mathbb{K}$ *: il existe* $f_i, g_{i,j} \in \mathbb{K}[[x]]$ *pour* $i, j = 1, 2, \ldots, p$ *tels que* $\hat{g}_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$,

$$\omega_i = \hat{g}_{i,1}\mathrm{d}\hat{f}_1 + \hat{g}_{i,2}\mathrm{d}\hat{f}_2 + \cdots + \hat{g}_{i,p}\mathrm{d}\hat{f}_p, \ \textit{pour } i = 1, 2, \ldots, p.$$

Nous verrons que ce résultat se déduit facilement du lemme suivant, certainement bien connu.

***Lemme 2.1* (de Poincaré relatif gradué).** — *Soit* $\alpha^k \in \Omega_1^k(\mathbb{K})$ *telle que* $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p \wedge \mathrm{d}\alpha^k = 0$, *alors il existe des polynômes* $u_1^k, u_2^k, \ldots, u_p^k \in \Omega_0^k$ *et* $u^{k+1} \in \Omega_0^{k+1}$ *tels que* $\alpha^k = \mathrm{d}u^{k+1} + u_1^k\mathrm{d}x_1^k + u_2^k\mathrm{d}x_2^k + \cdots + u_p^k\mathrm{d}x_p^k$.

Démonstration. — Nous procédons par récurrence sur les couples (p, k) ordonnés lexicographiquement. Pour $k = 0$, α^0 est fermée. Il existe $u^1 \in \Omega_0^1$ tel que $\alpha^0 = \mathrm{d}u^1$. Supposons que le lemme est vrai pour les $(p', k') < (p, k)$ et que $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p \wedge \mathrm{d}\alpha^k = 0$. Il existe des $\beta_i^{k-1} \in \Omega_1^{k-1}(\mathbb{K})$ tels que :

$$\mathrm{d}\alpha^k = \beta_1^{k-1} \wedge \mathrm{d}x_1 + \beta_2^{k-1} \wedge \mathrm{d}x_2 + \cdots + \beta_p^{k-1} \wedge \mathrm{d}x_p \tag{2.1}$$

En prenant la dérivée extérieure de cette égalité et le produit extérieur avec $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p$, on obtient $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p \wedge \mathrm{d}\beta_1^{k-1} = 0$. L'hypothèse de récurrence appliquée à la forme β_1^{k-1} montre qu'il existe des polynômes $v_j^{k-1} \in \Omega_0^{k-1}$ et $v^k \in \Omega_0^k$ tels que $\beta_1^{k-1} = \mathrm{d}v^k + v_1^{k-1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + v_p^{k-1}\mathrm{d}x_p$. En reportant cette égalité dans l'équation 2.1, on obtient $\mathrm{d}\alpha^k = \left(\mathrm{d}v^k + v_1^{k-1}\mathrm{d}x_1\right) \wedge \mathrm{d}x_1$ si $p = 1$ et, si $p > 1$:

$$\mathrm{d}\alpha^k = \left(\mathrm{d}v^k + \sum_{j=1}^{p} v_j^{k-1}\mathrm{d}x_j\right) \wedge \mathrm{d}x_1 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j^{k-1} \wedge \mathrm{d}x_j$$

Si $p = 1$, l'égalité ci-dessus montre que $\alpha^k - v^k\mathrm{d}x_1$ est fermée. D'après le lemme de Poincaré gradué classique, il existe $u_0^{k+1} \in \Omega_0^{k+1}(\mathbb{K})$ tel que $\alpha^k - v^k\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}u_0^{k+1}$. Si $p > 1$, on écrit :

$$\mathrm{d}\left(\alpha^k - v^k\mathrm{d}x_1\right) = \left(\sum_{j=2}^{p} v_j^{k-1}\mathrm{d}x_j\right) \wedge \mathrm{d}x_1 + \sum_{i=2}^{p} \beta_i^{k-1} \wedge \mathrm{d}x_i$$

Ainsi, $\mathrm{d}\left(\alpha^k - v^k\mathrm{d}x_1\right) \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p = 0$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\alpha^k - v^k\mathrm{d}x_1$. □

Démonstration du théorème de Frobenius formel sur $\mathbb{K}$. — Par un changement $\mathbb{K}$-linéaire de coordonnées, on peut supposer que $\omega_i(0) = \omega_i^0 = \mathrm{d}x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$. Nous allons construire des $\hat{a}_{i,j} \in \mathbb{K}[[x]]$, $i, j = 1, 2, \ldots, p$, tels que $\hat{a}_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$ et les 1-formes

$$\bar{\omega}_i = \hat{a}_{i,1}\omega_1 + \hat{a}_{i,2}\omega_2 + \cdots + \hat{a}_{i,p}\omega_p$$

soient fermées ; c'est à dire $\bar{\omega}_i = \mathrm{d}\hat{f}_i$, $\hat{f}_i \in \mathbb{K}\,[[x]]$. La matrice $M = (\hat{a}_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,p}$ est un élément de $\mathrm{GL}\,(p, \mathbb{K}\,[[x]])$, d'inverse $(\hat{g}_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,p}$. Par construction des $\hat{a}_{i,j} \in \mathbb{K}\,[[x]]$, $\hat{g}_{i,j}\,(0) = \delta_{i,j}$ et

$$\omega_i = \hat{g}_{i,1}\mathrm{d}f_1 + \hat{g}_{i,2}\mathrm{d}f_2 + \cdots + \hat{g}_{i,p}\mathrm{d}f_p\,.$$

Supposons qu'il existe $k > 0$ tel que pour $i = 1, 2, \ldots, p$, la forme $\omega_i = \omega_i^0 + \omega_i^1 + \cdots + \omega_i^s + \cdots$ vérifie $\mathrm{d}\omega_i^s = 0$ pour $s < k$. Cette condition est vraie pour $k = 1$. De la i-ème condition d'intégrabilité $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \mathrm{d}\omega_i = 0$, on déduit que $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p \wedge \mathrm{d}\omega_i^k = 0$. D'après le lemme de Poincaré relatif, il existe de $u_{i,j}^k \in \mathbb{K}\,[[x]]$ tels que la 1-forme

$$\bar{\omega}_i^k = \omega_i^k + u_{i,1}^k\mathrm{d}x_1 + u_{i,2}^k\mathrm{d}x_2 + \cdots + u_{i,p}^k\mathrm{d}x_p$$

est exacte pour $i = 1, 2, \ldots, p$. Puisque les $u_{i,j}^k$ sont homogènes de degré k la matrice

$$M = \lim_{k\to\infty} \left(M_k M_{k-1} \cdots M_1\right), \text{ avec } M_k = \mathrm{Id}_p + \left(u_{i,j}^k\right)$$

est bien définie avec $M\,(0) = \mathrm{Id}_p$. C'est un élément de $\mathrm{GL}\,(p, \mathbb{K}\,[[x]])$ d'inverse $(\hat{a}_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,p}$. Par construction, les $\hat{a}_{i,j}$ vérifient les propriétés requises ci-dessus. □

3. Démonstration du théorème de Frobenius classique sur $\mathbb{K}$

Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p \in \Omega_1\,(\mathbb{K})$ qui vérifient les conditions :

i) $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \mathrm{d}\omega_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$

ii) $\omega_1\,(0) \wedge \omega_2\,(0) \wedge \cdots \wedge \omega_p\,(0) \neq 0$.

Comme nous l'avons vu précédemment nous pouvons choisir des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des points $x \in \mathbb{C}^n$ telles que $\omega_i\,(0) = \mathrm{d}x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$ et nous écrivons :

$$x' = (x_1, x_2, \ldots, x_p)\,,\ \ x'' = (x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n)\,,\ \ x = (x', x'')$$

D'après le théorème classique de Frobenius, le système de Pfaff $\omega_1 = \cdots = \omega_p = 0$ définit un feuilletage holomorphe $\mathscr{F}$ de codimension p, sur un polydisque Δ centré en $0 \in \mathbb{C}^n$, qui est transverse aux espaces affines $x'' = \text{cste}$. La feuille $L_x \in \mathscr{F}$ passant par le point $(x', x'') \in \Delta$ coupe $x'' = 0$ en un unique point $(\tilde{x}', 0)$. Les fonctions $h_i : \Delta \to \mathbb{C}$ définies, pour $i = 1, 2, \ldots, p$, par :

$$h_i\,(x) = h_i\,(x_i', x_i'') = \tilde{x}_i'$$

sont des intégrales premières holomorphes de $\mathscr{F}$ sur Δ. Notons encore $h_i \in \mathbb{C}\,\{x\}$ leurs germes en 0. On a évidemment, pour $i = 1, 2, \ldots, p$:

$$h_i\,(x', 0) = x_i,\ \ \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \mathrm{d}h_i = 0\,.$$

Nous dirons que ces h_i sont les *intégrales premières naturelles* du système de Pfaff dans les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nous reformulons le théorème principal comme suit :

Théorème 3.0.4 **(de Frobenius classique sur $\mathbb{K}$).** — *Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p \in \Omega_1(\mathbb{K})$ qui vérifient les conditions :*

i) $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \mathrm{d}\omega_i = 0$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, p$

ii) $\omega_i(0) = \mathrm{d}x_i$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, p$.

Alors les intégrales premières naturelles h_i appartiennent à $\mathbb{K}\{x\}$.

Démonstration. — D'après le théorème formel, il existe de $\hat{f}_i \in \mathbb{K}[[x]]$, $i = 1, 2, \ldots, p$ telles que :

$$\omega_i(0) = \mathrm{d}\hat{f}_i(0) = \mathrm{d}x_i, \quad \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \omega_p \wedge \mathrm{d}\hat{f}_i = 0$$

L'élément $\hat{\psi}(x') = \left(\hat{\psi}_1(x'), \hat{\psi}_2(x'), \ldots, \hat{\psi}_p(x')\right)$ défini par $\hat{\psi}_i(x') = \hat{f}_i(x', 0)$ appartient à $\mathbb{K}[[x']]^p$ et il vérifie $\mathrm{D}_{x'}\hat{\psi}(0) = \mathrm{Id}_p$. Il existe $\hat{\varphi} \in \mathbb{K}[[x']]^p$ tel que $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}(x') = x'$. Les

$$\hat{h}_i(x) = \hat{\varphi}_i\left(\hat{f}_1(x), \hat{f}_2(x), \ldots, \hat{f}_p(x)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

possèdent les mêmes propriétés que les $\hat{f}_i$. Plus précisément on a, pour $i = 1, 2, \ldots, p$:

$$\hat{h}_i(x', 0) = x_i, \quad \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \mathrm{d}\hat{h}_i = 0\,.$$

Les intégrales premières naturelles h_i de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ vérifient également :

$$h_i(x', 0) = x_i, \quad \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \mathrm{d}h_i = 0\,.$$

On en déduit que pour $i = 1, 2, \ldots, p$:

$$h_i(x', 0) = \hat{h}_i(x', 0) = x_i, \quad \mathrm{d}h_1 \wedge \mathrm{d}h_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}h_p \wedge \mathrm{d}\hat{h}_i = 0\,.$$

D'après le théorème des fonctions composées dans $\mathbb{K}[[x]]^p$ il existe des $\widehat{\Phi}_i \in \mathbb{K}[[x']]^p$ tels que

$$\hat{h}_i(x) = \widehat{\Phi}_i(h_1(x), h_2(x), \ldots, h_p(x)) \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, p\,.$$

Puisque $h_i(x', 0) = \hat{h}_i(x', 0)$ on a $\left(\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_2, \ldots, \widehat{\Phi}_p\right) = \mathrm{Id}_p$ et $h_i = \hat{h}_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$. □

4. Théorème de Frobenius singulier sur $\mathbb{K}$, codimension 1

Démonstration. — D'après **[3]** et **[8]**, la 1-forme ω possède la propriété de division dans $\Omega_2(\mathbb{C})$: si $\alpha \in \Omega_2(\mathbb{C})$ vérifie $\alpha \wedge \omega = 0$, il existe $\beta \in \Omega_1(\mathbb{C})$ tel que $\alpha = \omega \wedge \beta$. Plus précisément, si $\alpha \in \Omega_2(\mathbb{K})$, on peut choisir $\beta \in \Omega_1(\mathbb{K})$. En effet les coefficients de β dans la base $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ sont solutions de systèmes linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}\{x\}$. Ces solutions s'obtiennent (via la méthode de Cramer) par des opérations algébriques dans $\mathbb{K}\{x\}$. En particulier, on doit diviser par certains déterminants $\Delta(x) \in \mathbb{K}\{x\}$ avec $\Delta(0) \neq 0$. L'inverse d'un tel élément de $\mathbb{K}\{x\}$ est encore un élément de $\mathbb{K}\{x\}$.

D'après **[6]**, la 1-forme ω possède un algorithme de Godbillon-Vey $\{\gamma_0 = \omega, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ où les $\gamma_i \in \mathbb{K}\{x\}$. Un argument de J. Martinet montre que la 1-forme, dont les coefficients dans la base $\mathrm{d}t, \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ appartiennent à $\mathbb{K}[[x, t]]$,

$$\Pi = \mathrm{d}t + t\gamma_1 + t^2\gamma_2 + \cdots + t^n\gamma_n + \cdots$$