

REPRÉSENTATIONS MODULAIRES DE $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ ET REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES DE DIMENSION 2

par

Laurent Berger

Résumé. — On démontre la conjecture de Breuil concernant la réduction modulo p des représentations triangulines V et des représentations $\Pi(V)$ de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ qui leur sont associées par la correspondance de Langlands p -adique. L'ingrédient principal de la démonstration est l'étude de certaines représentations lisses irréductibles de $B(\mathbf{Q}_p)$ via des modèles construits en utilisant les (φ, Γ) -modules.

Abstract (Modular representations of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ and 2-dimensional Galois representations)

We prove Breuil's conjecture concerning the reduction modulo p of trianguline representations V and of the representations $\Pi(V)$ of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ associated to them by the p -adic Langlands correspondence. The main ingredient of the proof is the study of some smooth irreducible representations of $B(\mathbf{Q}_p)$ through models built using the theory of (φ, Γ) -modules.

Introduction

Cet article s'inscrit dans le cadre de la correspondance de Langlands p -adique. Dans ses articles [10, 11], Breuil a défini une correspondance qui à une représentation p -adique V de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ qui est cristalline ou semi-stable, associe une représentation $\Pi(V)$ de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$. Le fait que $\Pi(V)$ est non-nul, irréductible et admissible a été démontré par Colmez pour les représentations semi-stables (voir [16]) puis par Breuil et moi-même pour les représentations cristallines dans [7]. La correspondance a ensuite été étendue aux représentations triangulines dans [16] puis à toutes les représentations de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ dans [17] par Colmez. Dans [9, 10], Breuil a par ailleurs défini une correspondance en caractéristique p et conjecturé qu'elle était compatible avec la première. L'objet de cet article est de démontrer cette conjecture pour les représentations triangulines.

Afin d'énoncer ce théorème, nous devons introduire quelques notations qui nous serviront par la suite. Dans tout cet article, p est un nombre premier et le corps L (le

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F33, 11F80, 11F85, 22E50.

Mots clefs. — Représentations galoisiennes, correspondance de Langlands p -adique, (φ, Γ) -modules.

« corps des coefficients ») est une extension finie de \mathbf{Q}_p dont on note \mathcal{O}_L l'anneau des entiers, \mathfrak{m}_L l'idéal maximal et k_L le corps résiduel. On note $G_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, ω la réduction modulo p du caractère cyclotomique ε , et pour $y \in L$ ou $y \in k_L$ on note μ_y le caractère non-ramifié de $G_{\mathbf{Q}_p}$ qui envoie Frob_p^{-1} (c'est-à-dire l'inverse du frobenius arithmétique) sur y . On normalise le corps de classes pour que $p \in \mathbf{Q}_p^\times$ s'envoie sur Frob_p^{-1} ce qui permet de voir μ_y comme le caractère non-ramifié de \mathbf{Q}_p^\times qui envoie p sur y . On note enfin ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2.

On appelle $B(\mathbf{Q}_p)$ le sous-groupe de Borel supérieur de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Pour alléger les notations, il nous arrivera d'écrire G pour $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et B pour $B(\mathbf{Q}_p)$ ainsi que d'identifier \mathbf{Q}_p^\times au centre de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si Π_1 et Π_2 sont deux k_L -représentations lisses de longueur finie de $B(\mathbf{Q}_p)$ (ou de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$), on écrira $\Pi_1 \underset{B}{\sim} \Pi_2$ (ou bien $\Pi_1 \underset{G}{\sim} \Pi_2$) pour signifier que les semi-simplifiées de Π_1 et de Π_2 sont isomorphes.

Si V est une représentation p -adique de $G_{\mathbf{Q}_p}$, on en choisit un \mathcal{O}_L -réseau T stable par $G_{\mathbf{Q}_p}$ et alors $\overline{V} = (k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} T)^{\text{ss}}$ ne dépend pas du choix de T par le théorème de Brauer-Nesbitt. De même, si Π est une représentation de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui admet un réseau Π^0 , on note $\overline{\Pi}$ la semi-simplifiée de la réduction de Π^0 qui, si elle est de longueur finie, ne dépend pas du choix du réseau dans une classe de commensurabilité.

Rappelons à présent les notations de [9] et la conjecture de [10]. Si $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et si $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow k_L^\times$ est un caractère continu, que l'on identifie à un caractère continu de $G_{\mathbf{Q}_p}$ via le corps de classes, alors on note $\text{ind}(\omega_2^{r+1})$ l'unique représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de déterminant ω^{r+1} et dont la restriction à l'inertie est $\omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}$. On pose $\rho(r, \chi) = (\text{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi$.

On pose par ailleurs :

$$\pi(r, \lambda, \chi) = \left(\frac{\text{ind}_{\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \text{Sym}^r k_L^2}{T - \lambda} \right) \otimes (\chi \circ \det),$$

où $\lambda \in \overline{\mathbf{F}_p}$ et T est un certain opérateur de Hecke (cf. [3]). Le théorème ci-dessous est alors l'extension aux représentations triangulines de la conjecture 1.2 de [10]. Plusieurs cas particuliers étaient déjà connus et sont rappelés en détail au §3.2.

Théorème A. — *Si V est une représentation trianguline irréductible, alors :*

$$\begin{aligned} \overline{V} = \rho(r, \chi) &\Leftrightarrow \overline{\Pi}(V) = \pi(r, 0, \chi) \\ \overline{V} = \begin{pmatrix} \mu_\lambda \omega^{r+1} & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi &\Leftrightarrow \overline{\Pi}(V) \underset{G}{\sim} \pi(r, \lambda, \chi) \oplus \pi([p-3-r], \lambda^{-1}, \omega^{r+1}\chi) \end{aligned}$$

Ici $[p-3-r]$ est l'unique entier appartenant à $\{0, \dots, p-2\}$ et qui est congruent à $p-3-r$ modulo $p-1$.

La démonstration de ce théorème est fondée sur le lien entre $\Pi(V)$ et le (φ, Γ) -module $D(V)$ (dont on rappelle la définition au §1.1), d'abord montré par Colmez pour les représentations semi-stables dans [16] puis par Breuil et moi-même pour

les représentations cristabellines dans [7] et enfin par Colmez pour les représentations triangulines (voir encore [16]).

Le premier chapitre est consacré à des rappels. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de représentations de $B(\mathbf{Q}_p)$ construites à partir de certaines représentations galoisiennes. On trouve soit des restrictions d'induites paraboliques, soit des restrictions de supersingulières et le fait d'en avoir des modèles explicites est important pour la suite. Nous démontrons notamment les résultats suivants d'intérêt indépendant, les notations étant rappelées dans les paragraphes 1.3 et 2.1.

Théorème B. — *Si Π est une k_L -représentation lisse irréductible de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ admettant un caractère central, alors :*

1. *si Π est un caractère, ou la spéciale, ou supersingulière, alors sa restriction à $B(\mathbf{Q}_p)$ est toujours irréductible ;*
2. *si Π est une série principale, alors sa restriction à $B(\mathbf{Q}_p)$ est une extension du caractère induisant $\chi_1 \otimes \chi_2$ par une représentation irréductible $\text{Ind}_{\mathbb{B}}^G(\chi_1 \otimes \chi_2)_0$.*

Ce théorème a depuis été généralisé par Paškūnas (cf. [24]) et par Vignéras (cf. [26]).

Théorème C. — *Si Π_1 et Π_2 sont deux k_L -représentations lisses semi-simples et de longueur finie de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ (dont les composantes irréductibles admettent un caractère central) et dont les semi-simplifications des restrictions à $B(\mathbf{Q}_p)$ sont isomorphes, alors Π_1 et Π_2 sont déjà isomorphes en tant que représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$.*

Dans le troisième chapitre, on utilise les résultats explicites du deuxième pour démontrer le théorème A. On termine en faisant le point sur les résultats que l'on en déduit concernant la réduction modulo p de certaines représentations cristallines et semi-stables.

Remerciements : Je remercie C. Breuil pour ses encouragements tout au long de la rédaction de ce travail, et je le remercie de même que P. Colmez pour des discussions éclairantes sur plusieurs points de cet article.

1. Rappels et compléments

L'objet de ce chapitre est de rappeler certaines des constructions faites dans le cadre de la « correspondance de Langlands p -adique ». Nous renvoyons à [7, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18] pour plus de détails.

1.1. Représentations galoisiennes et (φ, Γ) -modules

Nous reprenons les notations de l'introduction. Les caractères $\chi : G_{\mathbf{Q}_p} \rightarrow k_L^\times$ sont tous de la forme $\omega^r \mu_y$ pour $r \in \{0, \dots, p-2\}$ et $y \in k_L^\times$. Rappelons la classification des représentations absolument irréductibles de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 sur k_L . Soit $\omega_2 : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_{p^2}) \rightarrow \mathbf{F}_{p^2}^\times$ le caractère fondamental de Serre de niveau 2. On suppose

désormais que $\mathbf{F}_{p^2} \subset k_L$. Si $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et si $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow k_L^\times$ est un caractère continu, que l'on identifie à un caractère continu de $G_{\mathbf{Q}_p}$ via le corps de classes, alors on pose comme dans l'introduction :

$$\rho(r, \chi) = (\text{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi.$$

On obtient ainsi toutes les représentations absolument irréductibles de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 sur k_L , et les entrelacements entre les $\rho(r, \chi)$ sont les suivants (cf. par exemple l'introduction de [9]) :

$$\rho(r, \chi) \simeq \rho(r, \chi\mu_{-1}) \simeq \rho(p-1-r, \chi\omega^r) \simeq \rho(p-1-r, \chi\omega^r\mu_{-1}).$$

La classification des représentations p -adiques de $G_{\mathbf{Q}_p}$ est, comme on le sait, beaucoup plus compliquée mais la théorie des (φ, Γ) -modules permet de s'y retrouver un petit peu. Soient μ_{p^n} l'ensemble des racines p^n -ièmes de l'unité, $\mu_{p^\infty} = \bigcup_{n \geq 1} \mu_{p^n}$ et $\Gamma = \text{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ l'anneau défini par $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \{\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i \text{ où } a_i \in \mathcal{O}_L \text{ et } a_{-i} \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \infty\}$. On munit cet anneau d'un frobenius \mathcal{O}_L -linéaire φ défini par $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$ et d'une action \mathcal{O}_L -linéaire de Γ donnée par $\gamma(X) = (1+X)^{\varepsilon(\gamma)} - 1$ si $\gamma \in \Gamma$. Un (φ, Γ) -module étale est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module D de type fini muni d'un frobenius semi-linéaire φ tel que $\varphi^*(D) \simeq D$ (ici $\varphi^*(D)$ est le $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module engendré par $\varphi(D)$) et d'une action de Γ semi-linéaire continue et commutant à φ . Rappelons que Fontaine a construit dans [21, A.3.4] un foncteur $T \mapsto D(T)$ qui à toute \mathcal{O}_L -représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ associe un (φ, Γ) -module étale et que ce foncteur est une équivalence de catégories. Si $V = L \otimes_{\mathcal{O}_L} T$ est une représentation p -adique, alors on pose $D(V) = L \otimes_{\mathcal{O}_L} D(T)$.

L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un $\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ -module libre de rang p , dont une base est donnée par $\{(1+X)^i\}_{0 \leq i \leq p-1}$. Si $y \in D$, alors on peut écrire $y = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(y_i)$ et on définit un opérateur $\psi : D \rightarrow D$ par la formule $\psi(y) = y_0$ si $y = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(y_i)$.

Si D est un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, alors Colmez a repris et généralisé dans [18, §II.4] la construction de [23, §3] d'un sous- $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module D^\sharp de D , qui est caractérisé par les propriétés suivantes :

1. D^\sharp est un « treillis » de D (voir [18, §I.1]) ;
2. quels que soient $x \in D$ et $k \geq 0$, il existe $n(x, k) \geq 0$ tel que $\psi^n(x) \in D^\sharp + p^k D$ si $n \geq n(x, k)$;
3. l'opérateur ψ induit une surjection de D^\sharp sur lui-même.

Le calcul de $D^\sharp(V)$ pour des représentations de dimension 1 ne pose aucun problème et le calcul suivant est utile dans la suite de cet article.

Lemme 1.1.1. — *Si $W = k_L \cdot w$ est une k_L -représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 1, donnée par un caractère $\omega^r \mu_y$, alors $D^\sharp(W) = X^{-1} k_L[[X]] \cdot e$, avec $e = \alpha w$ où $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p$ est tel que $\alpha^{p-1} = y$.*

Sous les hypothèses du lemme ci-dessus, on pose alors $D^+(W) = k_L[[X]] \cdot e$. Remarquons en passant que $\varphi(e) = ye$ et que $\gamma(e) = \omega^r(\gamma)e$ si $\gamma \in \Gamma$. La notation D^+ provient de la théorie des représentations « de hauteur finie » de [21, §B] (qui n'intervient pas dans le reste de cet article).

Lemme 1.1.2. — Si W est une k_L -représentation irréductible de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension ≥ 2 , et si $M \subset D^\sharp(W)$ est un sous- $k_L[[X]]$ -module non-nul stable par ψ , alors $M = D^\sharp(W)$.

De même, si W est une k_L -représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 1, et si $M \subset D^+(W)$ est un sous- $k_L[[X]]$ -module non-nul stable par ψ , alors $M = D^+(W)$.

Démonstration. — Faisons tout d’abord le cas où W est de dimension ≥ 2 . Nous utilisons les notations du §II.5 de [18]. Par le corollaire II.5.12 de [18], il s’agit de montrer que $D^\flat = D^\sharp$. Le lemme suit alors du (ii) de la proposition II.5.19 de [18], en utilisant le (ii) de la remarque II.2.4 de [18] parce que $(W^*)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{\text{ab}})} = 0$.

Faisons maintenant le cas où W est de dimension 1. Il s’agit de montrer qu’un idéal non-nul et stable par ψ de $k_L[[X]]$ est égal à $k_L[[X]]$. Les idéaux de $k_L[[X]]$ sont de la forme $X^j k_L[[X]]$ pour $j \geq 0$ et un calcul facile montre que si $j \geq 1$, alors $\psi(X^j k_L[[X]])$ contient $X^{j-1} k_L[[X]]$ ce qui permet de conclure. \square

1.2. Construction de représentations de $B(\mathbf{Q}_p)$

Rappelons que si Π est une k_L -représentation profinie d’un groupe topologique G , alors sa duale Π^* (l’ensemble des formes linéaires continues $f : \Pi \rightarrow k_L$) est une k_L -représentation lisse de G et que si Π est topologiquement irréductible, alors Π^* est irréductible (voir par exemple le §2.3 de [5] pour une démonstration).

Si D est un (φ, Γ) -module, alors $\varprojlim_{\psi} D^\sharp$ dénote l’ensemble des suites $v = (v_i)_{i \geq 0}$ telles que $\psi(v_{i+1}) = v_i$ pour tout $i \geq 0$. Si D est un (φ, Γ) -module sur L , on demande en plus que la suite $(v_i)_{i \geq 0}$ soit bornée pour la topologie faible.

On fixe un caractère lisse χ de \mathbf{Q}_p^\times et on munit $\varprojlim_{\psi} D^\sharp$ d’une action de $B(\mathbf{Q}_p)$ comme suit. Tout élément $g \in B(\mathbf{Q}_p)$ peut s’écrire comme produit :

$$g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $x \in \mathbf{Q}_p^\times$, $j \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $z \in \mathbf{Q}_p$. Si $v = (v_i)_{i \geq 0} \in \varprojlim_{\psi} D^\sharp$, alors on pose pour $i \geq 0$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \star v \right)_i &= \chi^{-1}(x)v_i; \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \star v \right)_i &= v_{i-j} = \psi^j(v_i); \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \star v \right)_i &= \gamma_a^{-1}(v_i), \text{ où } \gamma_a \in \Gamma \text{ est tel que } \varepsilon(\gamma_a) = a; \end{aligned}$$