Séminaire BOURBAKI Juin 2003
55e année, 2002-2003, n$^{\mathrm{o}}$ 920, p. 321 à 333

NOMBRES DE BETTI L^2 ET FACTEURS DE TYPE II_1 [d'après D. Gaboriau et S. Popa]

par **Alain CONNES**

INTRODUCTION

M.F. Atiyah a introduit dans ([1]) les nombres de Betti L^2 pour les groupes discrets. Ces invariants ont ensuite été généralisés dans ([9]) aux feuilletages mesurés. L'intérêt initial de cette généralisation tient à des applications immédiates telles que l'existence de feuilles compactes stables pour tout feuilletage mesuré dont les feuilles sont de dimension 2 et ont une courbure dont l'intégrale (pour la mesure transverse) est positive.

Dans un article récent ([23]), D. Gaboriau a montré que les nombres de Betti L^2 des feuilletages à feuilles contractiles sont en fait des invariants de la relation d'équivalence mesurée associée. Il a de plus défini les nombres de Betti ℓ^2, $\{\beta_n(\mathcal{R})\}$, $n \geqslant 0$ pour toute relation d'équivalence mesurée $\mathcal{R}$ à orbites dénombrables.

Sa construction généralise aussi les nombres de Betti ℓ^2 d'Atiyah et Cheeger-Gromov ([1], [5]) pour les groupes discrets dénombrables Γ, $\{\beta_n(\Gamma)\}_{n\geqslant 0}$, et Gaboriau démontre que $\beta_n(\Gamma) = \beta_n(R_\Gamma)$, pour toute relation d'équivalence R_Γ engendrée par une action ergodique libre et préservant la mesure du groupe Γ sur un espace de probabilité (X, μ) ([23]).

La notion de coût des relations d'équivalence mesurées a été introduite par Levitt ([31]), le coût $C(\mathcal{R})$ de la relation $\mathcal{R}$ est la borne inférieure des mesures des sous-relations engendrant $\mathcal{R}$. Grâce à la notion d'arborage, due à Gaboriau (*cf.* [22]), le coût permet en particulier de retrouver le nombre de générateurs d'un groupe libre Γ comme invariant des relations d'équivalence mesurées provenant d'une action libre de Γ. L'idée des nombres de Betti des relations d'équivalence a été suggérée à Gaboriau par une remarque d'A. Valette, à savoir la validité, dans les exemples d'actions de groupes où l'on sait calculer les deux membres, de l'égalité

$$C(R_\Gamma) - 1 = \beta_1(\Gamma) - \beta_0(\Gamma)$$

L'on ne sait pas si cette égalité reste valable pour toute action ergodique libre d'un groupe discret Γ.

Le développement de la théorie des relations d'équivalence mesurées est depuis le début parallèle à celui de la théorie des facteurs, et plus précisément des facteurs de type II_1 pour les relations ergodiques préservant la mesure sur un espace de probabilité (X, μ).

À une telle relation $\mathcal{R}$ correspond canoniquement un facteur $L(\mathcal{R})$ de type II_1 par la construction de Murray et von Neumann (on peut également tordre par un 2-cocycle v (voir [21])). Cette construction n'est ni injective – le même facteur peut provenir de relations ergodiques non-isomorphes [15] – ni surjective même si l'on autorise un 2-cocycle ([49]). Il serait donc simpliste de penser que la « transposition » d'une théorie à l'autre est facile et il a souvent fallu attendre plusieurs années avant que la transplantation d'un résultat d'un côté à l'autre devienne possible. En fait il faut également rajouter à ce dictionnaire une troisième colonne contenant la théorie des groupes discrets. Pour tout groupe discret dénombrable Γ le commutant $L(\Gamma)$ de la représentation régulière droite de Γ est une algèbre de von Neumann finie, c'est un facteur de type II_1 si toutes les classes de conjugaison (hormis celle de 1) sont infinies (on dit alors que Γ est i.c.c). Ici le foncteur $\Gamma \to L(\Gamma)$ est très loin d'être injectif – tous les groupes moyennables (i.c.c.) donnent le même facteur R ([8]) – et n'est pas surjectif car il existe des facteurs de type II_1 non-antiisomorphes à eux-mêmes. Il y a essentiellement trois types de phénomènes bien répertoriés dans les trois colonnes, ce sont

1) Moyennabilité

Les résultats clefs dans ce domaine sont l'unicité du facteur hyperfini (Murray et von Neumann), et celle du facteur injectif (moyennable) ([8]). Ce dernier résultat implique en particulier que le facteur hyperfini R est isomorphe à tous ses sous-facteurs. La contrepartie du théorème de von Neumann pour les relations d'équivalence est le théorème de Dye ([20]). La contrepartie de ([8]) est l'unicité de la relation d'équivalence associée à une action de groupe moyennable ([36], [14]).

2) Liberté

Les résultats clefs dans ce domaine dans le cadre des facteurs sont la propriété d'approximation compacte H de Haagerup ([26]), et la théorie des probabilités libres de Voiculescu ([48]). Dans le cadre des groupes libres l'action sur les arbres ([47]) et dans le cas des relations d'équivalence l'« arborabilité » et le coût, mentionnés plus haut, jouent un rôle important.

3) Rigidité

Les résultats clefs sont ici la propriété T de Kazhdan ([30]) et le théorème de rigidité de Margulis ([33]). Ce théorème a été adapté par R. Zimmer aux relations d'équivalence mesurées ([50]), ce qui a permis des progrès décisifs dans ce domaine. La propriété T d'un groupe discret Γ ne dépend en fait que du facteur $L(\Gamma)$ associé et les facteurs correspondants ont des propriétés de rigidité remarquables ([16]).

S. Popa a réussi récemment à établir un tunnel entre les colonnes « facteurs » et « relations » en combinant les propriétés H de Haagerup et T de Kazhdan pour toute une classe de relations d'équivalence. Les facteurs associés à de telles relations (dites de classe HT) sont isomorphes si et seulement si les relations sont isomorphes. Cela lui a permis de résoudre un problème fondamental de la théorie des facteurs de type II_1, et de construire des facteurs M de type II_1 dont le groupe fondamental est trivial et qui sont en particulier non isomorphes à $M_k(\mathbb{C}) \otimes M$ pour tout entier $k \neq 1$.

Soit N un facteur de type II_∞ ; tout automorphisme $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$ multiplie la trace normale semi-finie τ sur N par un scalaire

$$\mathrm{Mod}(\theta) := (\tau \circ \theta) \,/\, \tau \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le groupe fondamental $F(N) := \{\mathrm{Mod}(\theta) \,|\, \theta \in \mathrm{Aut}(N)\} \subset \mathbb{R}_+^*$ a été défini par Murray et von Neumann dans les années 40. Pour un facteur M de type II_1 on définit $F(M) := F(M \otimes I_\infty)$ où I_∞ est le facteur de type I_∞. Murray et von Neumann ont montré que $F(M) = \mathbb{R}_+^*$ quand M est isomorphe au facteur hyperfini de type II_1, R, et plus généralement quand M est de la forme $P \otimes R$.

Les premiers exemples de facteurs M de type II_1 tels que $F(M) \neq \mathbb{R}_+^*$, ont été donnés dans ([10]). Soit Γ un groupe discret (dont les classes de conjugaison sont infinies) vérifiant la propriété T de Kazhdan, et $M := L(\Gamma)$ le facteur de type II_1 engendré par la représentation régulière de Γ. On montre alors avec $N = L(\Gamma) \otimes I_\infty$ que le groupe $\mathrm{Out}(N)$ des classes d'automorphismes de N modulo les automorphismes intérieurs est dénombrable de sorte que $F(L(\Gamma))$ est dénombrable. De plus pour tout sous-groupe dénombrable $D \subset \mathbb{R}_+^*$, l'existence de facteurs M de type II_1 avec $F(M)$ dénombrable contenant D est démontrée dans ([25], [43]). Mais la détermination exacte de $F(M)$ restait ouverte dans tous ces exemples.

1. NOMBRES DE BETTI ℓ^2

D. Gaboriau a défini les nombres de Betti ℓ^2, $\{\beta_n(\mathcal{R})\}$, $n \geqslant 0$ pour toute relation d'équivalence mesurée $\mathcal{R}$ à orbites dénombrables préservant la mesure. L'essentiel de sa démarche se comprend simplement si l'on tient compte de la théorie des mesures transverses sur les groupoïdes mesurables développée dans ([9]) pour formuler le théorème de l'indice longitudinal pour les feuilletages mesurés. Il suffit alors d'étendre (en passant du cas des groupes à celui des groupoïdes) les idées que Cheeger et Gromov ont développées dans ([5]) pour définir les nombres de Betti dans le cas « de covolume fini ».

La généralisation au cas des groupoïdes des notions d'action libre (resp. propre) d'un groupe discret sur un complexe simplicial et de la dimension de Murray-von Neumann d'espaces de chaînes L^2 ne pose aucun problème ([9]). Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence ergodique à orbites dénombrables, préservant la mesure sur un espace de probabilité (X,μ). Munissons $\mathcal{R}\subset X^2$ de sa structure naturelle de groupoïde, les deux projections étant notées r et s, $(r(x,y):=x$ et $s(x,y):=y)$ et la loi de composition $(x,y)\circ(y,z):=(x,z)$. Un $\mathcal{R}$-espace discret est un foncteur mesurable Y de la petite catégorie $\mathcal{R}$ vers celle des ensembles dénombrables. La réunion $\overline{Y}:=\cup_{x\in X}Y(x)$ est un espace borélien standard, la projection $\pi\,:\,\overline{Y}\to X$, $\pi(z)=x\,,\forall\, z\in Y(x)$ et l'action $Y(x,y)\,:\,Y(y)\to Y(x)$ sont boréliennes. On ne s'intéresse qu'aux $\mathcal{R}$-espace discrets *réguliers* obtenus par réduction $\widetilde{\mathcal{R}}_B$ de la somme directe $\widetilde{\mathcal{R}}$ d'une infinité dénombrable de copies du foncteur $\mathcal{R}(x)\,:=\,r^{-1}(x)$ par un borélien invariant B. L'invariance de la mesure μ montre alors que la mesure $\widetilde{\mu}(F)$ ne dépend ni du choix d'un domaine fondamental F tel que $\mathcal{R}F=B$ ni de l'identification de Y avec $\widetilde{\mathcal{R}}_B$. C'est la *mesure transverse* $\Lambda(Y)$ ([9]). En composant Y avec le foncteur ℓ^2 qui à un ensemble dénombrable Z associe l'espace de Hilbert $\ell^2(Z)$, on obtient un foncteur mesurable (représentation) de $\mathcal{R}$ vers la catégorie des espaces de Hilbert séparables. Son commutant est une algèbre de von Neumann semi-finie $\mathrm{End}_\Lambda(\ell^2(Y))$ qui possède une unique trace normale semi-finie Tr_Λ telle que

$$\mathrm{Tr}_\Lambda(1_Z)=\Lambda(Z)$$

pour tout borélien $\mathcal{R}$-invariant Z. De plus $\mathrm{End}_\Lambda(\ell^2(Y))$ agit dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ intégrale directe des $\ell^2(Y(x))$ sur (X,μ). C'est l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{H}$ pour la structure évidente de $L(\mathcal{R})$-module hilbertien et la dimension de Murray-von Neumann de ce module est égale à $\mathrm{Tr}_\Lambda(1)$ (Voir ([9]).

Un $\mathcal{R}$-complexe simplicial est un foncteur mesurable Σ vers la catégorie des ensembles simpliciaux dénombrables et l'on ne s'intéresse qu'au cas où le $\mathcal{R}$-espace discret $\Sigma^{(0)}$ des sommets est régulier (il en va alors de même pour les $\Sigma^{(n)}$). Dans le cas des feuilletages des variétés compactes, la compacité ambiante suffisait à régler les problèmes d'uniformité, mais dans le cas général traité par Gaboriau les nombres de Betti ne sont plus nécessairement finis et il faut ajouter une étape intermédiaire (analogue à ([5])) avant de définir ces nombres.

Définition 1.1 ([23]). — *Un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ est uniformément localement borné ssi il existe $N<\infty$ tel que tout $x\in\Sigma^{(0)}$ soit le sommet d'au plus N simplexes et si $\Lambda(\Sigma^{(0)})<\infty$.*

En composant Σ avec le foncteur qui associe à un complexe simplicial localement borné le complexe de ses chaînes ℓ^2,

$$0\xleftarrow{\partial_0}C_0^{(2)}\xleftarrow{\partial_1}C_1^{(2)}\xleftarrow{\partial_2}\cdots\xleftarrow{\partial_n}C_n^{(2)}\xleftarrow{\partial_{n+1}}C_{n+1}^{(2)}\xleftarrow{\partial_{n+2}}\cdots$$

on obtient un complexe de $L(\mathcal{R})$ modules.

DÉFINITION 1.2 ([23])

(i) *L'homologie L^2 d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial uniformément borné Σ est le $L(\mathcal{R})$-module*

$$H_n^{(2)}(\Sigma, \mathcal{R}, \mu) := \operatorname{Ker} \partial_n / \overline{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

(ii) *L'homologie L^2 d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ est la limite inductive des homologies L^2 de ses sous-complexes uniformément bornés.*

Ces deux définitions sont compatibles entre elles. La deuxième ne donne pas nécessairement un $L(\mathcal{R})$-module hilbertien mais W. Luck ([32]) a montré comment prolonger la dimension de Murray-von Neumann : Dim_M au cas des modules généraux sur un facteur fini M. Cela permet de définir les nombres de Betti d'un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ comme la dimension généralisée,

$$\beta_n(\Sigma, \mathcal{R}) := \mathrm{Dim}_{L(\mathcal{R})}(H_n^{(2)}(\Sigma, \mathcal{R}, \mu)).$$

Un $\mathcal{R}$-complexe simplicial Σ est dit n-connexe ssi $\Sigma(x)$ est n-connexe pour tout $x \in X$. Le résultat essentiel de D. Gaboriau s'énonce alors ainsi,

THÉORÈME 1.3 ([23]). — *Tous les $\mathcal{R}$-complexes simpliciaux n-connexes ont le même nombre de Betti $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R})$.*

On définit alors $\beta_n(\mathcal{R})$ comme la valeur commune des $\beta_n(\Sigma, \mathcal{R})$ pour Σ un $\mathcal{R}$-complexe implicial n-connexe. L'existence d'un tel complexe s'obtient en composant le foncteur $\widetilde{\mathcal{R}}$ ci-dessus avec celui qui associe à tout ensemble dénombrable Z le complexe simplicial universel EZ tel que $EZ^{(0)} = Z$.

COROLLAIRE 1.4 ([23])

(i) *Soit Γ un groupe discret agissant librement sur un espace de probabilité (X, μ) alors $\beta_n(R_\Gamma) = \beta_n(\Gamma)$.*

(ii) *Deux groupes discrets orbitalement équivalents ont les mêmes nombres de Betti ℓ^2.*

(On dit que deux groupes discrets Γ_j sont orbitalement équivalents s'ils possèdent une action ergodique libre sur un espace de probabilité engendrant la même relation d'équivalence.)

2. FACTEURS DE TYPE II_1

S. Popa introduit la classe $\mathcal{HT}$ des facteurs M de type II_1 qui possèdent une sous-algèbre abélienne maximale A telle que l'inclusion $A \subset M$ satisfasse deux propriétés, l'une $(\mathcal{T})$ de rigidité, l'autre $(\mathcal{H})$ d'approximation compacte. Il montre alors que si M possède une telle sous-algèbre abélienne maximale, celle-ci est unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur et détermine de manière unique une relation d'équivalence ergodique $\mathcal{R}$ à orbites dénombrables, préservant la mesure sur un espace