

**AMIBES DE VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES  
ET DÉNOMBREMENT DE COURBES**

[d'après G. Mikhalkin]

par **Ilia ITENBERG**

**INTRODUCTION**

Le nom *amibes* pour les objets que nous allons considérer a été introduit par I. M. Gelfand, M.M. Kapranov et A.V. Zelevinsky [8] en 1994. Des objets similaires surgissaient de temps en temps (voir, par exemple, [3]) avant l'apparition formelle des amibes sur la scène mathématique. (Il faut signaler que le terme *amibe* est utilisé aussi en logique, mais a une signification complètement différente.) Une amibe typique dans  $\mathbb{R}^2$  est une région non bornée qui ressemble un peu au dessin d'une amibe biologique (voir la Figure 1).

Les amibes habitent dans l'intersection de plusieurs domaines des mathématiques tels que la géométrie algébrique, la géométrie symplectique, la topologie, l'analyse complexe et la combinatoire. Elles permettent de visualiser des variétés algébriques et de les étudier par des méthodes non algébriques. Des résultats impressionnants ont été obtenus au cours de ces neuf années passées depuis l'introduction des amibes. Les premières observations fondamentales ont été faites par Gelfand, Kapranov et Zelevinsky [8]. Les résultats concernant les amibes et provenant de leur traitement analytique sont essentiellement dus à M. Forsberg, M. Passare, H. Rullgård et A. Tsikh (voir [6, 26, 30, 31]). Les interprétations topologiques et la plupart des applications des amibes (en particulier, les relations avec la géométrie algébrique réelle) sont dues à G. Mikhalkin [19, 20, 21, 22, 23].

Le texte actuel est principalement consacré aux applications des amibes. Nous verrons d'abord des exemples d'utilisation des amibes en topologie des variétés algébriques réelles (voir le paragraphe 1.3). Les autres applications présentées concernent des questions de géométrie énumérative. Un rôle important dans ces applications énumératives est joué par les amibes *non archimédiennes*, (*i.e.* les amibes de variétés sur un corps valué non archimédien) qui ont été introduites par Kapranov [12]. Elles sont

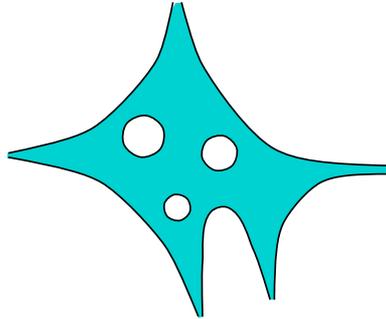


FIGURE 1. Une amibe

étroitement liées à un domaine relativement nouveau et très passionnant : la *géométrie algébrique tropicale* (voir, par exemple, [35]).

On peut déformer les amibes d'hypersurfaces complexes en amibes non archimédiennes. Ces amibes non archimédiennes sont des complexes polyédraux dans  $\mathbb{R}^n$  qui peuvent être considérés comme des variétés sur un semi-anneau tropical  $(\max, +)$ , et par conséquent, portent le nom de *variétés tropicales*. La déformation que l'on vient de mentionner est en rapport direct avec la déquantification de Maslov des nombres réels strictement positifs ([17, 18]), la construction du patchwork due à O. Viro (voir [37, 38] et [28]) et le passage à « *large complex limit* » (voir [16]). M. Kontsevich [16] a proposé d'utiliser les courbes tropicales dans des questions concernant le dénombrement de courbes passant par des points donnés sur une surface complexe. Ce programme a été mis en œuvre par Mikhalkin [22, 23].

Mikhalkin a découvert une correspondance qui fournit un lien direct entre la géométrie algébrique complexe et la géométrie tropicale. Cette correspondance permet de dénombrer certaines courbes nodales de genre donné qui passent par des points génériques donnés sur une surface torique. Formulé de manière informelle, le théorème de Mikhalkin affirme que le nombre de courbes en question est égal au nombre de leurs analogues tropicaux passant par des points génériques donnés dans  $\mathbb{R}^2$  et comptés avec des multiplicités. En plus, Mikhalkin a trouvé un algorithme combinatoire pour dénombrer les courbes tropicales correspondantes.

La correspondance de Mikhalkin permet aussi de dénombrer les courbes réelles passant par des collections spécifiques de points réels sur une surface torique (bien entendu, avec les résultats dépendant du choix de la collection ; voir [22], [23]). Heureusement, une autre découverte importante est tombée à pic : celle faite par J.-Y. Welschinger (voir [41, 42]). Il a trouvé une façon d'attribuer des poids aux courbes réelles rationnelles, conçue pour rendre le nombre de courbes comptées avec poids indépendant de la configuration des points et produire des bornes inférieures

pour le nombre de courbes en question. Ainsi est apparu un autre type d'applications de la correspondance de Mikhalkin. Cette approche a déjà donné des résultats, en particulier, l'existence des courbes réelles rationnelles passant par des points réels donnés dans le plan projectif réel (voir [11] et le paragraphe 3.5).

Comme complément utile aux textes de Mikhalkin, le lecteur peut consulter le texte [32], où E. Shustin, inspiré par les résultats de Mikhalkin et la technique tropicale, donne une description et une preuve alternatives de la correspondance de Mikhalkin.

Le texte est organisé de la façon suivante. La section 1 contient la définition et une brève description des propriétés des amibes, ainsi que des applications de celles-ci à la topologie des variétés algébriques réelles.

La section 2 est consacrée à la géométrie algébrique tropicale. Le paragraphe 2.1 porte sur la déquantification des nombres réels strictement positifs. Le paragraphe 2.3 contient des notions de base concernant des variétés tropicales. La définition et les propriétés des amibes non archimédiennes sont présentées dans le paragraphe 2.4.

La section 3 porte sur des résultats énumératifs. Les paragraphes 3.1 et 3.4 sont consacrés aux formulations de questions énumératives (respectivement, complexes et réelles). Les analogues tropicaux des notions algèbro-géométriques nécessaires pour le théorème de correspondance sont présentés dans le paragraphe 3.2. Le théorème de correspondance lui-même fait l'objet du paragraphe 3.3. Le paragraphe 3.5 contient des formules combinatoires pour les nombres de courbes étudiés.

Finalement, la section 4 présente les idées des démonstrations des théorèmes principaux.

*Remerciements.* — L'auteur tient à remercier M. Coste, V. Kharlamov, G. Mikhalkin, E. Shustin et O. Viro pour des discussions très utiles. L'auteur remercie G. Mikhalkin pour avoir mis à sa disposition une version préliminaire de [23].

## 1. AMIBES DE VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

### 1.1. Définition et propriétés de base

Soient  $n$  un entier strictement positif, et  $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$  une variété algébrique (pour un corps  $K$  quelconque, on pose  $K^* = K \setminus \{0\}$ ). Considérons l'application

$$\begin{aligned} \text{Log} : (\mathbb{C}^*)^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|). \end{aligned}$$

DÉFINITION 1.1. — *L'amibe  $\mathcal{A}(V)$  de  $V$  est l'image de  $V$  par l'application  $\text{Log}$ .*

Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont mis en évidence les propriétés suivantes des amibes.

- L'amibe  $\mathcal{A}(V)$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$ , et le complémentaire de  $\mathcal{A}(V)$  est non vide.
- Si  $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$  est une hypersurface, alors chaque composante connexe du complémentaire de  $\mathcal{A}(V) \subset \mathbb{R}^n$  est convexe.

La propriété de convexité des composantes connexes du complémentaire de l'amibe d'une hypersurface ne se transporte pas littéralement au cas des variétés de codimension plus élevée. Néanmoins, en codimension  $> 1$ , il existe certaines généralisations de la propriété de convexité (voir, par exemple, [9]).

Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont aussi décrit le comportement des amibes à l'infini en termes d'amibes de dimensions plus petites. Soient  $\Delta$  un polytope convexe à sommets entiers dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $\text{Tor}_\Delta$  la variété torique associée (voir, par exemple, [7]). La variété  $\text{Tor}_\Delta$  est une compactification de  $(\mathbb{C}^*)^n$  telle que l'action multiplicative de  $(\mathbb{C}^*)^n$  sur lui-même se prolonge sur  $\text{Tor}_\Delta$ . Le complémentaire de  $(\mathbb{C}^*)^n \subset \text{Tor}_\Delta$  se décompose en réunion des variétés toriques associées aux faces de  $\Delta$ . Notons  $\tilde{V} \subset \text{Tor}_\Delta$  la compactification de  $V$ .

Le polytope  $\Delta$  détermine aussi une forme symplectique  $\omega$  sur  $\text{Tor}_\Delta$ . Cette forme est invariante par l'action du tore  $(S^1)^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$  formé par les  $(z_1, \dots, z_n)$  tels que  $|z_1| = \dots = |z_n| = 1$ . Considérons l'application des moments correspondante  $\mu : \text{Tor}_\Delta \rightarrow \Delta$  (voir, par exemple, [2]).

DÉFINITION 1.2. — *L'amibe compactifiée  $\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{V})$  de  $\tilde{V}$  est  $\mu(\tilde{V}) \subset \Delta$ .*

Remarquons que l'application  $\text{Log} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  peut aussi être vue comme une application des moments (pour l'action de  $(S^1)^n$  sur  $(\mathbb{C}^*)^n$  muni de la forme symplectique  $\frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{dz_j}{z_j} \wedge \frac{d\bar{z}_j}{\bar{z}_j}$ ).

Les applications  $\mu|_{(\mathbb{C}^*)^n}$  et  $\text{Log}$  sont des submersions et ont les mêmes tores réels pour fibres. Par conséquent,  $\mathcal{A}(V)$  peut être envoyé sur  $\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{V}) \cap \text{Int}(\Delta)$  (où  $\text{Int}(\Delta)$  est l'intérieur de  $\Delta$ ) par un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\text{Int}(\Delta)$ .

Soient  $\Delta'$  une face de  $\Delta$ , et  $\text{Tor}_{\Delta'} \subset \text{Tor}_\Delta$  la variété torique associée à  $\Delta'$ . Posons  $\tilde{V}' = \tilde{V} \cap \text{Tor}_{\Delta'}$ .

PROPOSITION 1.3 (Gelfand, Kapranov et Zelevinsky, [8]). — *On a*

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{V}') = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{V}) \cap \Delta'.$$

L'amibe d'une courbe  $V \subset (\mathbb{C}^*)^2$  atteint l'infini par « tentacules » (voir la Figure 1). Chaque tentacule contient exactement un rayon, et tend vers ce rayon en s'approchant de l'infini. Le rayon contenu dans un tentacule est orthogonal à un côté de  $\Delta$  (on dit que le tentacule est associé à ce côté de  $\Delta$ ). Le nombre de tentacules associés à un côté  $c$  est strictement positif et inférieur ou égal à la longueur entière de  $c$ , (*i.e.* au nombre de segments en lesquels  $c$  est divisé par ses points entiers).

## 1.2. Amibes d'hypersurfaces

Soit  $f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}}$  un polynôme complexe à  $n$  variables (ici  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$  est un multi-indice,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$  et  $\mathbf{z}^{\mathbf{i}} = z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ ), et  $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$  l'hypersurface définie par  $f$  dans  $(\mathbb{C}^*)^n$ . L'enveloppe convexe  $\Delta$  des points  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$  tels que  $a_{\mathbf{i}} \neq 0$  s'appelle le *polytope de Newton* de  $f$  (on dit aussi que  $\Delta$  est le polytope de Newton de  $V$ ).

À chaque composante connexe du complémentaire de  $\mathcal{A}(V)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut associer, d'une façon naturelle, un point entier de  $\Delta$ .

**THÉORÈME 1.4** (M. Forsberg, M. Passare et A. Tsikh, [6]). — *Il existe une fonction localement constante  $\text{ind} : \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V) \rightarrow \Delta \cap \mathbb{Z}^n$  qui envoie des composantes connexes différentes du complémentaire de  $\mathcal{A}(V)$  sur des points entiers différents de  $\Delta$ . En particulier, le nombre de composantes connexes de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$  est inférieur ou égal au nombre de points entiers de  $\Delta$ .*

*Remarque 1.5.* — Mikhalkin a proposé une interprétation topologique de la démonstration du Théorème 1.4. Pour décrire une fonction  $\text{ind}$  ayant les propriétés formulées ci-dessus, choisissons un point  $x$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$ . L'image réciproque de  $x$  par  $\text{Log}$  est un tore dont l'intersection avec  $V$  est vide. Pour chaque entier  $1 \leq j \leq n$ , considérons un  $j$ -ème méridien  $m_j$  de ce tore, *i.e.* un cercle le long duquel toutes les coordonnées sauf la  $j$ -ème sont constantes. Soit  $D_j$  un disque de bord  $m_j$  dans  $\mathbb{C}^n$ . Notons  $\kappa_j$  l'indice d'intersection de  $D_j$  et de l'adhérence de  $V$  dans  $\mathbb{C}^n$ . L'entier  $\kappa_j$  ne dépend pas du choix de  $m_j$  et  $D_j$ . L'application  $\text{ind} : \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathbb{Z}^n$  associant à  $x$  le point  $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$  est localement constante et envoie des composantes connexes différentes de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$  sur des points entiers différents de  $\Delta$ . On renvoie à [19] pour les détails.

La borne supérieure pour le nombre de composantes connexes de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$  formulée dans le Théorème 1.4 est atteinte : pour tout polytope convexe  $\Delta$  à sommets entiers dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe une hypersurface  $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$  de polytope de Newton  $\Delta$  telle que le nombre de composantes connexes de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(V)$  soit égal au nombre de points entiers de  $\Delta$  (voir, par exemple, [20]).

Un outil analytique très important dans l'étude des amibes est la *fonction de Ronkin*. Pour un polynôme  $f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}}$ , la fonction de Ronkin  $N_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$N_f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(\mathbf{x})} \log |f(\mathbf{z})| \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}.$$

(On considère ici la fonction  $\log |f| : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  en posant  $\log(0) = -\infty$ .) L'énoncé suivant est un corollaire du fait que  $\log |f|$  est une fonction plurisousharmonique qui est pluriharmonique sur  $(\mathbb{C}^*)^n \setminus V$  et strictement plurisousharmonique sur  $V$ .