Séminaire BOURBAKI Juin 2003
55^{e} année, 2002-2003, n^{o} 922, p. 363 à 402

SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES GROUPES LIBRES
[d'après Sela]

par **Frédéric PAULIN**

Étant donné un groupe G, on appelle *théorie élémentaire de* G l'ensemble $\mathbf{T}(G)$ des formules closes du langage des groupes (en logique du premier ordre) qui sont vérifiées dans G, et *théorie universelle de* G l'ensemble $\mathbf{T}_{\forall}(G)$ de ces formules en forme prénexe dont les quantificateurs sont tous $\forall$ (voir le chapitre 1). Deux groupes G, G' sont dits *élémentairement équivalents* si $\mathbf{T}(G) = \mathbf{T}(G')$ et *universellement équivalents* si $\mathbf{T}_{\forall}(G) = \mathbf{T}_{\forall}(G')$.

Dans une série de travaux peu lisibles, Sela [Sel1]-[Sel6] annonce[(1)] des résultats profonds sur la théorie élémentaire des groupes libres, répondant à des questions soulevées par Tarski vers 1945 (voir [Tar] dans un contexte plus large et [LS, page 51]). En attendant les arbitrages en cours (voir la note ajoutée sur épreuve), nous les énonçons encore sous forme de conjecture.

Conjecture 1. — *Deux groupes libres de type fini, non cycliques, sont élémentairement équivalents.*

Sela annonce la liste exacte des groupes de type fini, qui sont élémentairement équivalents à un groupe libre de type fini, non cyclique : ce sont les *tours hyperboliques* (voir le chapitre 6.1), construites par « recollements » successifs de groupes libres et de groupes fondamentaux de surface. On a en particulier l'énoncé frappant suivant.

Conjecture 2. — *Le groupe fondamental d'une surface compacte connexe de caractéristique d'Euler au plus* -2 *est élémentairement équivalent à un groupe libre de type fini, non cyclique.*

Le problème de Tarski de savoir quels sont les groupes élémentairement équivalents à un groupe donné, se pose pour d'autres beaux groupes, comme $SL_n(\mathbb{Z})$ et les réseaux des groupes de Lie connexes. Mais en tant qu'objets universels, les groupes libres sont

(1) Le premier résultat ci-dessus, ainsi que la décidabilité de la théorie élémentaire d'un groupe libre de type fini non cyclique, avaient été annoncés en 1998 par Kharlampovich-Myasnikov [KM0]. Avec le recul de cinq ans, il semble clair que les auteurs n'avaient pas de preuve écrite complète en 1998. Voir [KM1]-[KM5] pour l'état de leurs travaux.

fondamentaux et prioritaires. De plus, leur « flexibilité » fait que le problème est beaucoup plus difficile à résoudre pour eux que pour des groupes plus « rigides ». En utilisant les mêmes techniques que pour les groupes libres, Sela [Sel7] annonce aussi la caractérisation des groupes de type fini qui sont élémentairement équivalents à un groupe sans torsion hyperbolique (au sens de Gromov, voir [Ghy1]).

Cet article est consacré aux résultats structurels sur les *groupes limites*, *i.e.* les groupes de type fini universellement équivalents à un groupe libre de type fini. Nous avons suivi de près l'approche topologique de Champetier-Guirardel [CG]. Voir aussi [BF4].

Dans le chapitre 3, nous donnons diverses caractérisations simples, dues à Remeslennikov [Rem], Kharlampovich-Myasnikov [KM1, KM2], Sela [Sel1], Champetier-Guirardel [CG], des groupes limites (ce sont aussi les groupes « multi-résiduellement libres » de type fini, les sous-groupes de type fini d'un ultraproduit de groupe libre, les groupes « limites de groupes libres »), ainsi que leurs premières propriétés.

Dans le chapitre 5, nous donnons les théorèmes principaux de [KM2, Sel1] sur la structure des groupes limites. En particulier (voir [Sel1]), en prenant pour racine un groupe limite G donné, on construit naturellement un arbre fini enraciné de quotients stricts successifs, de sommets terminaux des groupes libres, appelé *diagramme de Makanin-Razborov*, qui permet de « décrire » l'ensemble de tous les morphismes de G dans un groupe libre.

Les outils principaux sont ceux des actions de groupes sur les arbres, au sens de [Ser], avec les contributions fondamentales de Rips-Sela [RS] sur les actions à stabilisateurs d'arêtes cycliques, que nous rappelons dans le chapitre 4. Nous en donnons des versions relatives, utiles pour gérer les contraintes sur les paramètres.

Donnons une justification à l'intérêt de l'étude des groupes limites pour résoudre le problème de Tarski pour les groupes libres (outre le fait qu'un groupe de type fini élémentairement équivalent à un groupe libre de type fini est bien sûr un groupe limite). La structure des formules (quantification sur des variables de combinaisons booléennes d'équations de groupes en ces variables) montre l'intérêt de l'étude des équations dans les groupes. De nombreux travaux portent sur ce sujet, dont ceux fondateurs de Lyndon [Lyn1, Lyn2]. Les plus frappants jusqu'ici étaient ceux de Makanin [Mak1, Mak2], qui montrent d'une part qu'il existe un algorithme pour décider si un système fini d'équations dans un groupe libre admet une solution, et d'autre part que les théories universelles et positives d'un groupe libre de type fini sont décidables, et ceux de Razborov [Raz], qui décrivent la structure de l'ensemble de toutes les solutions d'un système fini d'équations dans un groupe libre. Le lien avec le chapitre 5 est le suivant. Considérons un système fini d'équations $\underline{m}(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n, \underline{x}) = 1$ avec $\underline{x}$ un uplet d'inconnues, $\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n$ des uplets de paramètres (nécessaires pour le traitement de la récurrence sur le nombre d'alternances de quantificateurs), et $\underline{m}$ un uplet de mots ès lettres de $\underline{x}, \underline{x}^{-1}, \underline{p_i}, \underline{p_i}^{-1}$. Les solutions de ce système dans un groupe libre F,

lorsque les paramètres varient dans F soumis à certaines contraintes, sont en bijection avec les morphismes de groupes, à valeurs dans F, du groupe G de présentation $\langle \underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n, \underline{x} \mid \underline{m}(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n, \underline{x}) = 1 \rangle$, *marqué* par la suite génératrice (correspondant à) $(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n, \underline{x})$, avec contraintes sur les images des $\underline{p}_i$. Enfin, comprendre les morphismes d'un groupe de type fini dans un groupe libre se ramène à comprendre les morphismes d'un nombre fini de groupes limites dans les groupes libres (voir paragraphe 5.2). Mis à part Lyndon et Remeslennikov sous une forme différente, c'est sans doute Rips qui a eu le premier l'idée que l'on pourrait utiliser les techniques d'actions de groupes sur les arbres (pas forcément simpliciaux), en particulier à stabilisateurs d'arête cycliques, pour résoudre le problème de Tarski.

Nous concluons cette introduction en donnant un aperçu du schéma de la preuve de Sela de l'énoncé 1. Notons que Bestvina-Feighn annoncent d'autres preuves des résultats des articles [Sel3, Sel4].

Le cœur des travaux de Sela [Sel2]-[Sel5], dont nous ne parlerons malheureusement pas ici, et qui est sans doute incontournable pour une solution du problème de Tarski, est un procédé d'élimination des quantificateurs. Soient $\mathbb{L}_n, \mathbb{L}_m$ deux groupes libres de rang $n, m \geqslant 2$, dont on souhaite montrer qu'ils sont élémentairement équivalents, et a_1, a_2 les deux premiers éléments communs d'une partie génératrice libre de $\mathbb{L}_n, \mathbb{L}_m$. Par un résultat classique (voir [Sac] disant que $\mathbb{L}_n$ et $\mathbb{L}_m$ ont la même théorie universelle-existentielle, il suffit, par récurrence, de montrer que toute partie d'une puissance de $\mathbb{L}_n$, définissable par une formule $\exists \forall \exists$, est une combinaison booléenne de parties définissables par des formules $\forall \exists$, et ceci de manière indépendante de n. C'est ce que fait Sela dans [Sel5]. Avec un traitement nécessaire d'une partition en deux des variables libres, il s'agit de comprendre les parties des puissances de $\mathbb{L}_n$ définissables par une formule $\forall \exists$. Lorsque celle-ci est close et positive, disons $\forall \underline{y}\ \exists \underline{z}\ \ \underline{m}(\underline{y}, \underline{z}) = 1$, Merzliakov [Mer], dans sa preuve de l'égalité des théories positives de $\mathbb{L}_n$ et $\mathbb{L}_m$, introduit un procédé de « solutions formelles » : par des méthodes de « petite simplification » (comme dans [Sac] d'ailleurs), Merzliakov montre qu'il existe un uplet de mots $\underline{z}(\underline{y}, a_1, a_2)$ en $\underline{y}, {}^{\pm}, a_i^{\pm}$, tels que la formule $\forall \underline{y}\ \exists \underline{z}\ \ \underline{m}(\underline{y}, \underline{z}) = 1$ est satisfaite dans $\mathbb{L}_n, \mathbb{L}_m$ si et seulement si $\forall \underline{y}\ \ \underline{m}(\underline{y}, \underline{z}(\underline{y}, a_1, a_2)) = 1$ l'est. Sela étend ces solutions formelles au cas où la formule $\forall \exists$ n'est plus positive [Sel2] (voir aussi [KM3a]) et possède des variables libres [Sel5]. C'est la partie la plus technique, qui amène Sela à introduire de nouvelles variables, ce qui l'oblige dans [Sel4] à un travail important pour assurer la finitude de ses procédés d'élimination de quantificateurs.

Remerciements. — Cet article doit beaucoup aux travaux [CG, Gui] de Christophe Champetier et Vincent Guirardel, et je les remercie pour leurs nombreuses conversations, suggestions et corrections. Je remercie aussi G. Baumslag, F. Dahmani, T. Delzant, O. Kharlampovich, G. Levitt, A. Myasnikov, P. Papasoglu, Z. Sela.

1. THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES GROUPES

1.1. Formules

Dans ce texte, nous appellerons *formule* toute expression logique de la forme

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_{n'} x_{n'} \quad \bigvee_{i=1}^{k} \Big(\bigwedge_{j=1}^{k_i} m_{ij}(x_1, \dots, x_n) = 1 \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{k'_i} m'_{ij}(x_1, \dots, x_n) \neq 1 \Big)$$

avec

– n, n', k, k_i, k'_i dans $\mathbb{N}$ tels que $n' \leqslant n$,
– Q_i l'un des quantificateurs $\forall, \exists$,
– $\vee, \wedge$ les connecteurs logiques « ou », « et »,
– x_i une variable, avec $x_1, \dots, x_{n'}$ les *variables liées* et $x_{n'+1}, \dots, x_n$ les *variables libres*,
– m_{ij}, m'_{ij} des mots réduits dans les lettres $x_1, \dots, x_n$ et leurs inverses $x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}$.

Toute formule en ce sens est une formule du langage des groupes et toute formule du langage des groupes est équivalente, modulo la théorie des groupes, à une formule en ce sens (voir par exemple [CK]).

Une formule est *sans quantificateur* si $n' = 0$, *close* si $n' = n$, *universelle* si Q_i est $\forall$ pour tout i, *existentielle* si Q_i est $\exists$ pour tout i, *positive* si $k'_i = 0$ pour $i = 1, \dots, k$. Une *formule* $\forall\exists$ est une formule comme ci-dessus telle qu'il existe n'' dans $\mathbb{N}$ avec $0 \leqslant n'' \leqslant n'$ tel que Q_i est $\forall$ pour $1 \leqslant i \leqslant n''$ et Q_i est $\exists$ pour $n'' < i \leqslant n'$. On définit de même une *formule* $\exists\forall\exists$.

Si G est un groupe, on appelle *théorie élémentaire* (respectivement *universelle, existentielle, positive,* $\forall\exists$, $\exists\forall\exists$) de G l'ensemble des formules closes (respectivement closes universelles, closes existentielles, closes positives, closes $\forall\exists$, closes $\exists\forall\exists$) vérifiées dans G, et on la note $\mathbf{T}(G)$ (respectivement $\mathbf{T}_\forall(G)$, $\mathbf{T}_\exists(G)$, $\mathbf{T}_+(G)$, $\mathbf{T}_{\forall\exists}(G)$, $\mathbf{T}_{\exists\forall\exists}(G)$).

Un *plongement élémentaire* $f : G \to G'$ est un morphisme injectif de groupes tels que, pour toute formule $\varphi(\underline{x})$, de k-uplet de variables libres $\underline{x}$, et pour tout k-uplet $\underline{a}$ dans G, l'expression logique $\varphi(\underline{a})$ est vérifiée dans G si et seulement si $\varphi(f(\underline{a}))$ est vérifiée dans G'. Dans [Sel6], Sela annonce (voir aussi [KM5]) que le plongement standard $\mathbb{L}_n \to \mathbb{L}_m$ pour $n \leqslant m$ est un plongement élémentaire, ce qui, par restriction aux formules closes, implique la validité de la conjecture 1.

Remarques

(1) Il est facile de voir que $\mathbf{T}(\mathbb{Z}^n) = \mathbf{T}(\mathbb{Z}^m)$ si et seulement si $n = m$, et plus généralement qu'un groupe de type fini est élémentairement équivalent à $\mathbb{Z}^n$ si et seulement s'il lui est isomorphe.

(2) Deux groupes libres de type fini non cycliques sont universellement équivalents (*i.e.* $\mathbf{T}_\forall(\mathbb{L}_n) = \mathbf{T}_\forall(\mathbb{L}_m)$ pour tous $n, m \geqslant 2$), car ils se plongent l'un dans l'autre,

et toute formule close universelle vérifiée dans un groupe est aussi vérifiée dans un sous-groupe.

(3) Un résultat classique (voir [Sac]) dit que $\mathbf{T}_{\forall\exists}(\mathbb{L}_n) = \mathbf{T}_{\forall\exists}(\mathbb{L}_m)$ pour tous $n, m \geqslant 2$. Merzlyakov [Mer] a démontré que $\mathbf{T}_+(\mathbb{L}_n) = \mathbf{T}_+(\mathbb{L}_m)$ pour tous $n, m \geqslant 2$.

1.2. Des propriétés élémentaires des groupes libres

Pour illustrer la notion de formule, voici quelques propriétés vérifiées par un groupe G élémentairement équivalent à un groupe libre non cyclique F, ainsi qu'une famille de formules closes vérifiées dans F, dont la validité dans G entraîne ces propriétés.

(1) G est non abélien

$$\exists\, xy \;\; [x,y] \neq 1.$$

(2) G est sans torsion

$$\{ \;\forall\, x \;\; (x = 1) \vee (x^n \neq 1) \;\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}.$$

(3) G est *commutatif-transitif*

$$\forall\, xyz \;\; y = 1 \vee [x,y] \neq 1 \vee [y,z] \neq 1 \vee [x,z] = 1.$$

(4) Tout sous-groupe abélien maximal A de G est *malnormal* (*i.e.* si $gAg^{-1} \cap A$ est non trivial, alors g appartient à A)

$$\{ \;\forall\, xyz \;\; y = 1 \;\vee\; [x,y] \neq 1 \;\vee\; [y,z] \neq 1 \;\vee\; [x,z] = 1,$$
$$\forall\, xy \;\; x = 1 \;\vee\; y = 1 \;\vee\; [x, yxy^{-1}] \neq 1 \;\vee\; [x,y] = 1 \;\}.$$

(5) Si G est commutatif-transitif et si tout sous-groupe abélien est abélien libre de type fini, alors tout sous-groupe abélien de G est cyclique

$$\forall\, xy \;\; \exists\, u \;\; [x,y] \neq 1 \;\vee\; (xu^2 = 1 \;\wedge\; [u,x] = 1)$$
$$\vee\; (yu^2 = 1 \;\wedge\; [u,y] = 1) \;\vee\; (xyu^2 = 1 \;\wedge\; [u,xy] = 1).$$

Les formules closes (2) (3) (4) sont des formules universelles, la première est une formule existentielle, la dernière une formule $\forall\exists$. Remarquons que si G est commutatif-transitif, alors le centralisateur de tout élément non trivial est abélien, donc tout sous-groupe abélien non trivial est contenu dans un unique sous-groupe abélien maximal. Notons que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ sont élémentairement équivalents, comme me l'a fait remarquer T. Coulbois.

Par contre, l'expression logique suivante (tout sous-groupe abélien de G est cyclique), n'est pas du premier ordre, car on y quantifie sur les parties (ou sur les entiers).

$$\forall\, P \subset G,\; (\forall\, xy \in P,\; xy^{-1} \in P \;\wedge\; [x,y] = 1) \Rightarrow (\exists\, x \in G,\; \forall\, y \in P,\; \exists\, n \in \mathbb{N},\;\; y = x^n).$$

Cette propriété est vérifiée dans un groupe de type fini élémentairement équivalent à un groupe libre (voir corollaire 5.4). Mais il n'existe pas d'ensemble de formules du premier ordre la définissant, comme me l'a fait remarquer F. Point.