

MOTIFS DE DIMENSION FINIE
[d'après S.-I. Kimura, P. O'Sullivan,...]

par Yves ANDRÉ

Table des matières

1. Introduction : les groupes de Chow sont-ils « de dimension finie » ?	116
1.1. Contre	116
1.2. Pour	117
2. Motifs purs	118
2.1. Définitions	118
2.2. Exemples	120
2.3. Équivalences adéquates et $\otimes$ -idéaux	121
2.4. Le théorème de semi-simplicité de Jannsen	122
2.5. Motifs de dimension finie. La conjecture de Kimura-O'Sullivan	124
2.6. La conjecture de nilpotence de Voevodsky	124
2.7. Filtration sur les groupes de Chow. La conjecture de Bloch-Beilinson	125
3. Catégories de Kimura-O'Sullivan	126
3.1. Foncteurs de Schur	126
3.2. Objets pairs et objets impairs	127
3.3. Propriétés de $\otimes$ -nilpotence	129
3.4. Propriétés de nilpotence	130
3.5. Le théorème de scindage	133
3.6. La stratégie de O'Sullivan	133
3.7. Objets de dimension finie et super-fibrés vectoriels équivariants	135
4. Applications	137
4.1. Motifs de surfaces	137
4.2. Motifs sur les corps finis	138
4.3. Rationalité de fonctions zêta motiviques	140
4.4. Construction inconditionnelle des groupes de Galois motiviques	141
4.5. Motifs de Chow vus comme super-fibrés vectoriels équivariants sous le groupe de Galois motivique. Hauteurs	142
Références	143

1. INTRODUCTION : LES GROUPES DE CHOW SONT-ILS « DE DIMENSION FINIE » ?

1.1. Contre

Soit X une variété projective lisse connexe de dimension d sur un corps k algébriquement clos. Soit $Z^*(X)$ le groupe des cycles algébriques sur X (groupe abélien libre engendré par les sous-variétés irréductibles de X), gradué par la codimension. Le groupe de Chow $\mathrm{CH}^*(X)$ est le quotient de $Z^*(X)$ par l'équivalence rationnelle.

En codimension 1, sa structure est bien connue (le cas $d = 1$ et $k = \mathbb{C}$ remonte au XIX^e siècle) : on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{CH}^1(X)_0 \longrightarrow \mathrm{CH}^1(X) \longrightarrow \mathrm{NS}(X) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{NS}(X)$ est un groupe abélien de type fini (dit de Néron-Severi), ainsi qu'un isomorphisme (dit d'Abel-Jacobi)

$$\mathrm{AJ}_X^1 : \mathrm{CH}^1(X)_0 \cong \mathrm{Pic}_X^0(k),$$

où Pic_X^0 est la variété abélienne de Picard attachée à X .

En codimension > 1 , l'espoir de comprendre ces groupes par dévissage en une partie discrète dénombrable et une partie continue contrôlée par les points d'une variété algébrique a donné naissance à la construction de théories de variétés de Picard et d'applications d'Abel-Jacobi intermédiaires.

À la fin des années 60, cet espoir s'est écroulé, même dans le cas le mieux compris après celui de la codimension 1, à savoir le cas de codimension maximale d . Dans ce cas, l'application d'Abel-Jacobi s'écrit

$$\mathrm{AJ}_X^d : \mathrm{CH}^d(X)_0 \longrightarrow \mathrm{Alb}_X(k),$$

où $\mathrm{CH}^d(X)_0$ est le groupe des 0-cycles de degré 0, et Alb_X la variété abélienne d'Albanese attachée à X . Cette application est surjective.

En 1969, D. Mumford [37] a démontré que si X est une surface sur $k = \mathbb{C}$, AJ_X^2 n'est injective que si le genre géométrique $p_g(X)$ est nul (*i.e.* que si $H^2(X)$ est engendré par les classes de diviseurs). Par exemple, si X est le carré d'une courbe Y de genre ≥ 2 , (d'où $p_g(X) \neq 0$), et en notant δ_Y l'application diagonale de Y , le 0-cycle $[D \times D] - \deg D \cdot (\delta_Y)_*[D]$ sur X est dans le noyau de AJ_X^2 pour tout diviseur D sur Y ; dans un article récent [13], M. Green et P. Griffiths montrent que ce 0-cycle n'est pas nul si D est « assez général ».

A. Roitman [42] a d'ailleurs démontré peu après Mumford que AJ_X^2 induit un isomorphisme sur la torsion, et est injective si et seulement si l'application différence

$$S^n(X) \times S^n(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^2(X)_0, \quad (\{x_1, \dots, x_n\}, \{x'_1, \dots, x'_n\}) \longmapsto \sum x_i - \sum x'_i$$

est surjective pour n assez grand (où $S^n(X)$ désigne la puissance symétrique n -ième de X , c'est-à-dire $X^n/\mathfrak{S}_n$). Ces résultats impliquent qu'en un sens convenable, $\mathrm{CH}^2(X)_0$ n'est pas contrôlé par une variété de dimension finie si $p_g(X) \neq 0$.

1.2. Pour

Dans l'article [26], qui remonte à plusieurs années, S.-I. Kimura introduit un point de vue tout à fait nouveau sur cette question de la « dimension finie » des groupes de Chow. Étant donnés $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} := \mathrm{CH}^*(X) \otimes \mathbb{Q}$, on peut former leur produit $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n \in \mathrm{CH}^*(X^n)_{\mathbb{Q}}$ et définir les produits alternés et symétriques par la recette usuelle

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\mathrm{sgn}(\sigma)}{n!} \alpha_{\sigma(1)} \times \dots \times \alpha_{\sigma(n)}, \quad \beta_1 \bullet \dots \bullet \beta_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} \beta_{\sigma(1)} \times \dots \times \beta_{\sigma(n)}.$$

Kimura montre que lorsque X est le produit de deux courbes projectives lisses, *il existe un entier n tel que, pour tout n -uplet de cycles $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans le noyau de $\mathrm{AJ}_X^2 \otimes \mathbb{Q}$, on ait $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = 0$.*

Il montre par ailleurs que si X est une courbe, l'assertion analogue est vraie à condition de remplacer produits alternés par produits symétriques : *il existe un entier n tel que, pour tout n -uplet de cycles $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ dans $\mathrm{CH}^1(X)_0 \otimes \mathbb{Q}$, on ait $\beta_1 \bullet \dots \bullet \beta_n = 0$.*

Ces observations suggèrent que les groupes de Chow $\otimes \mathbb{Q}$ se comportent en un sens comme des *super-espaces vectoriels de dimension finie*.

S.-I. Kimura, et indépendamment P. O'Sullivan, ont avancé au milieu des années 90 l'idée audacieuse qu'il s'agirait d'un phénomène tout à fait général : ils conjecturent que, pour toute variété projective lisse X , *il existe une décomposition (en général non canonique)*

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^*(X)_+ \oplus \mathrm{CH}^*(X)_-$$

et un entier naturel n , tels que pour tout n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'éléments de $\mathrm{CH}^(X)_+$ et tout n -uplet $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ d'éléments de $\mathrm{CH}^*(X)_-$, on ait*

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = \beta_1 \bullet \dots \bullet \beta_n = 0.$$

L'exposé est consacré à l'analyse des tenants et aboutissants de cette conjecture.

Plan de l'exposé. — Le cadre naturel pour comprendre la nature de cette conjecture et ses implications est celui des motifs. Nous commencerons donc par rappeler la construction et diverses propriétés des motifs purs (pour une équivalence adéquate quelconque), notamment la semi-simplicité des motifs numériques conjecturée par A. Grothendieck et prouvée par U. Jannsen.

La forme générale de la conjecture de Kimura-O'Sullivan est que tout motif pour l'équivalence rationnelle est somme d'un motif pair (*i.e.* dont une puissance extérieure s'annule) et d'un motif impair (*i.e.* dont une puissance symétrique s'annule). C'est prouvé pour les motifs « de type abélien ». Nous indiquons aussi les liens entre cette conjecture et deux autres conjectures fondamentales sur les groupes de Chow (Voevodsky, Bloch-Beilinson).

Nous passons ensuite à l'étude générale de la notion catégorique d'objet pair et d'objet impair, puis à celle des catégories F -tensorielles dans lesquelles tout objet est somme d'un pair et d'un impair. Cet axiome tout simple s'avère extrêmement fécond, comme l'ont mis en lumière Kimura et surtout O'Sullivan. Nous verrons qu'une telle catégorie se décrit d'une part comme « extension » d'une catégorie F -tensorielle abélienne semi-simple par un « radical » localement nilpotent, et d'autre part comme catégorie de super-fibrés vectoriels équivariants.

Revenant aux motifs et aux groupes de Chow, nous tirons pour terminer les fruits de ces considérations catégoriques.

Remerciements. — Je remercie Bruno Kahn pour sa lecture critique attentive d'une première version de ce texte. Je remercie Shun-Ichi Kimura et Peter O'Sullivan d'avoir mis à ma disposition les versions les plus récentes de leurs papiers soumis, et d'avoir répondu diligemment à toutes mes questions concernant leurs travaux. Ce texte s'est nourri des nombreuses discussions que j'ai eues avec eux trois à propos des motifs de dimension finie.

Convention générale. — Dans tout le texte, F désigne un corps de caractéristique nulle. Nous dirons *catégorie F -tensorielle* pour « catégorie F -linéaire monoïdale symétrique $\mathcal{T}$, essentiellement petite⁽¹⁾, *rigide* (tout objet M a un dual $M^\vee$), *pseudo-abélienne* (tout endomorphisme idempotent a un noyau), et vérifiant $\text{End } \mathbf{1} = F$ ($\mathbf{1}$ désignant l'objet unité) ».

Dans toute catégorie F -tensorielle, on a la notion de *trace d'un endomorphisme*, et de *rang* (ou dimension) d'un objet : $\text{rg } M = \text{tr}(\text{id}_M) \in F$. Nous renvoyons à [43] pour les bases de la théorie des catégories monoïdales.

Étant donnés deux objets M, N , on note $\mathcal{T}(M, N)$ le F -espace des morphismes de M vers N . Les $\otimes$ -foncteurs entre catégories F -tensorielles sont sous-entendus F -linéaires.

2. MOTIFS PURS

2.1. Définitions

La notion de motif pur a été introduite par Grothendieck dans les années soixante. Elle permet notamment de mettre en valeur les propriétés catégoriques du calcul des correspondances algébriques. Un exposé Bourbaki lui a été consacré il y a 35 ans [12]. La théorie s'étant beaucoup développée depuis une quinzaine d'années, un bref tour d'horizon s'impose.

⁽¹⁾*i.e.* les classes d'isomorphisme d'objets, et les morphismes entre deux objets quelconques, forment des ensembles appartenant à un univers fixé.

Soit $\mathcal{P}(k)$ la catégorie des variétés projectives lisses sur un corps k . Pour tout $X \in \mathcal{P}(k)$, notons $\mathcal{Z}^*(X)_F$ le F -espace vectoriel engendré par les sous-variétés irréductibles de X , gradué par la codimension. On fixe une relation d'équivalence *adéquate* $\sim$ (en termes vagues, il s'agit d'une relation d'équivalence linéaire $\sim$ sur $\mathcal{Z}^*(X)_F$ pour tout $X \in \mathcal{P}(k)$, telle que modulo $\sim$, les images directes et inverses des cycles sont définies ainsi que le produit d'intersection⁽²⁾). Muni du produit d'intersection, le quotient $\mathcal{Z}^*_\sim(X)_F = \mathcal{Z}^*(X)_F / \sim$ acquiert alors une structure d'anneau gradué. Les éléments de $\mathcal{Z}^{\dim X+r}_\sim(X \times Y)_F$ s'appellent correspondances algébriques (modulo $\sim$) entre X et Y , de degré r . La formule

$$g \circ f = \text{pr}_{XZ^*}^{XYZ}(\text{pr}_{XY}^{XYZ^*}(f) \cdot \text{pr}_{YZ^*}^{XYZ^*}(g))$$

définit une loi de composition associative pour les correspondances modulo $\sim$ (les degrés s'additionnent). Les équivalences adéquates qui nous intéresseront sont les suivantes, de la plus fine à la plus grossière :

- l'équivalence rationnelle : $\alpha \sim_{\text{rat}} 0$ dans $\mathcal{Z}^*(X)_F$ s'il existe $\beta \in \mathcal{Z}^*(X \times \mathbb{P}^1)_F$ tel que $\beta(0)$ et $\beta(\infty)$ soient bien définis et que $\alpha = \beta(0) - \beta(\infty)$; on écrit plutôt $\text{CH}^*(X)_F$ que $\mathcal{Z}^*_{\text{rat}}(X)_F$,
- l'équivalence homologique pour une cohomologie de Weil fixée H (à coefficients dans une extension K/F) : $\alpha \sim_{\text{hom}} 0$ si sa classe fondamentale en cohomologie H est nulle,
- l'équivalence numérique : $\alpha \sim_{\text{num}} 0$ dans $\mathcal{Z}^r(X)_F$ si pour tout cycle de dimension complémentaire β , le degré $\langle \alpha, \beta \rangle$ du 0-cycle $\alpha \cdot \beta$ est nul⁽³⁾.

Définissons à présent la *catégorie* $M_\sim(k)_F$ *des motifs purs* à coefficients dans F sur le corps de base k , pour l'équivalence $\sim$.

Les objets sont les triplets (X, e, r) , où $X \in \mathcal{P}(k)$, $r \in \mathbb{Z}$, et $e \in \mathcal{Z}^{\dim X+r}_\sim(X \times X)_F$ est une correspondance idempotente : $e^2 = e$. Il est suggestif de noter ce triplet $e\mathfrak{h}_\sim(X)(r)$ (ou simplement $e\mathfrak{h}(X)(r)$), en pensant au symbole $\mathfrak{h}$ comme à une cohomologie universelle.

Un morphisme $e\mathfrak{h}(X)(r) \rightarrow f\mathfrak{h}(Y)(s)$ est un élément de

$$f \circ \mathcal{Z}^{\dim X-r+s}_\sim(X \times Y)_F \circ e$$

(correspondance de degré $s - r$). La composition des morphismes est celle des correspondances.

On a un foncteur contravariant $\mathfrak{h}_\sim : \mathcal{P}(k) \rightarrow M_\sim(k)_F$ qui associe à X le motif $\mathfrak{h}_\sim(X) = \text{id} \cdot \mathfrak{h}_\sim(X)(0)$ et à tout morphisme le transposé de son graphe.

⁽²⁾Voir [45] ou [2] pour plus de précisions.

⁽³⁾Une conjecture « standard » de Grothendieck prédit que l'équivalence homologique coïncide avec l'équivalence numérique.