Séminaire BOURBAKI Novembre 2003
56[e] année, 2003-2004, n[o] 925, p. 15 à 28

SLE ET INVARIANCE CONFORME
[d'après Lawler, Schramm et Werner]

par **Jean BERTOIN**

1. INTRODUCTION

La physique statistique s'intéresse à des systèmes macroscopiques définis à l'échelle microscopique sur un réseau par un grand nombre de données aléatoires, éventuellement corrélées. Le modèle microscopique est souvent facile à définir ; on s'attend à ce que le changement d'échelle du microscopique au macroscopique induise une limite en loi vers un modèle continu qui garde la trace des propriétés spécifiques du modèle discret.

Un exemple fondamental est la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$: on considère une trajectoire aléatoire $S : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^d$, disons issue de $S_0 = 0$, telle que les accroissements $\xi_n = S_n - S_{n-1}$ soient des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), avec $\mathbb{P}(\xi_n = x) = 1/2d$, où x désigne l'un des $2d$ plus proches voisins de 0 sur $\mathbb{Z}^d$. Si l'on effectue le changement d'échelle

$$W_t^{(N)} = \sqrt{d/N}\, S_{[Nt]}, \quad t \geqslant 0,$$

alors le Théorème Central Limite implique que pour tous $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k$, le k-uplet $(W_{t_1}^{(N)}, \ldots, W_{t_k}^{(N)})$ converge en loi vers $(W_{t_1}^{(\infty)}, \ldots, W_{t_k}^{(\infty)})$, où $(W_t^{(\infty)}, t \geqslant 0)$ est un processus dont les accroissements sont indépendants et tels que pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $W_t^{(\infty)} - W_s^{(\infty)}$ suive la loi de Gauss de moyenne nulle et de matrice de covariance $(t-s)\,\mathrm{Id}$. Par ailleurs, le fait que la marche aléatoire simple ne saute que sur ses plus proches voisins suggère que sa limite macroscopique devrait avoir des trajectoires continues, et il est naturel de chercher à construire directement une mesure de probabilité $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{C}([0,\infty[, \mathbb{R}^d)$, dont les marginales fini-dimensionnelles sont celles de $W^{(\infty)}$. C'est ce qu'a accompli Norbert Wiener, la mesure $\mathcal{W}$ s'appelle la mesure de Wiener, et le processus correspondant est le mouvement brownien.

Pour de nombreux modèles discrets de la physique statistique en dimension 2, et pour la valeur critique du paramètre à laquelle se produit la transition de phase, les physiciens prédisent non seulement l'existence d'une limite continue, mais également que cette limite vérifie une propriété d'invariance conforme. Pour reprendre l'exemple du mouvement brownien dans $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, donnons-nous deux domaines simplement connexes $D, D' \neq \mathbb{C}$ contenant l'origine et $f : D \to D'$ une application conforme qui met D et D' en bijection. Notons $\mathcal{W}_D$ (respectivement $\mathcal{W}_{D'}$) la loi sur l'espace des courbes continues à valeurs dans D (respectivement D') induite par la trajectoire brownienne arrêtée la première fois où elle quitte D (respectivement D'). Alors l'image de $\mathcal{W}_D$ par l'application qui transforme une courbe dans D en une courbe dans D' par l'application conforme f, est $\mathcal{W}_{D'}$. Cette propriété importante du mouvement brownien complexe a été observée par Paul Lévy ; il est intéressant de noter qu'elle est vérifiée pour la limite continue, mais pas pour le modèle discret, c'est-à-dire la marche aléatoire symétrique simple.

Penchons-nous maintenant sur un modèle voisin, celui de la marche aléatoire auto-évitante. Plus précisément, on se donne toujours un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$, on considère la marche aléatoire simple symétrique sur le réseau $N^{-1}\mathbb{Z}^2$ que l'on arrête lorsqu'elle quitte D. La probabilité que cette marche ne visite jamais deux fois ou plus le même site est strictement positive. On peut donc la conditionner par cet événement et on obtient ainsi une marche auto-évitante dans D. D'après ce qui précède, on s'attend d'une part à l'existence d'une limite continue donnée par une mesure de probabilité sur les trajectoires auto-évitantes à valeurs dans D, et d'autre part à ce que cette limite continue vérifie la propriété d'invariance conforme. Pour l'instant, ceci est toujours un problème ouvert. On peut également chercher à construire directement un modèle continu qui satisfasse aux propriétés fondamentales qu'on attend. Une approche naïve consisterait à tenter de conditionner une trajectoire brownienne dans D à ne jamais se recouper, mais ce conditionnement ne peut être réalisé rigoureusement[(1)] car il est bien connu que presque sûrement, le mouvement brownien plan visite à nouveau des points par lesquels il est déjà passé, et ce pour des intervalles de temps arbitrairement petits.

Depuis quelques années, des avancées spectaculaires ont été réalisées dans ce domaine par Schramm, Lawler, Werner et Smirnov. Elles reposent de façon essentielle sur une famille à un paramètre de mesures de probabilités sur les courbes du plan complexe vérifiant une propriété d'invariance conforme, qui ont été construites par Oded Schramm. Il a été établi rigoureusement que certains modèles discrets en physique statistique admettent effectivement une limite continue qui peut être décrite par ces mesures (pour des valeurs adéquates du paramètre), et des conjectures très précises prédisent que c'est encore le cas pour d'autres modèles importants. En outre, ces mesures permettent de calculer rigoureusement des valeurs des exposants critiques

[(1)] Symanzik [18] a cherché à rendre rigoureux ce conditionnement, mais son programme conduit à une loi absolument continue par rapport à la mesure de Wiener, et donc pour laquelle les trajectoires ont toujours des points multiples.

pour le mouvement brownien plan ou la percolation (*cf.* [8, 9, 17]), et de vérifier ainsi les prédictions des physiciens (voir notamment [5] et [6]). Schramm a construit ces objets en introduisant l'aléa dans une méthode due à Loewner, qui, de façon informelle, permet de coder certaines familles croissantes de compacts du demi-plan à l'aide de courbes réelles. Il les a nommés *Stochastic Loewner Evolution* (SLE) ; il est désormais plus juste d'utiliser ces mêmes initiales pour *Schramm-Loewner Evolution*.

L'objet de cet exposé est de proposer une présentation succincte et non technique de ce thème, l'un des plus importants actuellement en théorie des probabilités. Nous renvoyons au papier de Lawler [7] pour une introduction plus détaillée à SLE, et aux excellentes notes de cours de Werner [19] et aux travaux qui y sont cités pour une présentation complète.

2. L'ÉQUATION DE LOEWNER ET SA VERSION STOCHASTIQUE

2.1. L'équation de Loewner

Notons $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan supérieur. Soit $K \subseteq \overline{\mathbb{H}}$ un compact tel que $H := \mathbb{H}\backslash K$ soit simplement connexe ; on dira qu'un tel K est une *cosse* (hull en anglais). Le théorème de Riemann assure l'existence d'applications conformes $g_K : H \to \mathbb{H}$ avec $g_K(\infty) = \infty$. Le principe de réflection de Schwarz permet d'étendre analytiquement g_K à $\{z \in \mathbb{C} : z \notin K \text{ et } \overline{z} \notin K\}$. Le développement analytique de g_K au voisinage de ∞ (ce qui revient à développer $z \mapsto 1/g_K(1/z)$ au voisinage de $z = 0$) s'écrit alors sous la forme

$$g_K(z) = bz + a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots$$

avec $b > 0$ et $a_j \in \mathbb{R}$. Il y a une famille à 2 paramètres de telles applications conformes g_K (observer que pour tous $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$, l'application $z \mapsto g_K(cz) + d$ vérifie les mêmes propriétés), et on convient de choisir la normalisation, parfois dite hydrodynamique, pour laquelle $b = 1$ et $a_0 = 0$. Autrement dit, on a

$$g_K(z) = z + a_1/z + O(z^{-2}), \quad z \to \infty.$$

Le coefficient $a_1 := a(K)$ s'appelle la capacité de K, il a une interprétation probabiliste simple : considérons un mouvement brownien complexe W issu de iy, et notons τ le premier temps d'atteinte de $K \cup \mathbb{R}$. Alors il est facile de voir que

$$a(K) = \lim_{y\to\infty} y\mathbb{E}^{iy}(\operatorname{Im}(W_\tau)).$$

L'observation élémentaire suivante va jouer un rôle important dans la suite : si $J \subseteq K$ sont deux cosses, correspondant aux applications conformes normalisées g_J

et g_K, et si on note $L = \overline{g_J(K\backslash J)}$, alors il est facile de vérifier la formule dite de subordination

$$g_K = g_L \circ g_J. \tag{1}$$

En particulier, on en déduit l'identité entre capacités

$$a(K) = a(J) + a(L).$$

De façon informelle, ceci montre que la croissance des compacts de $\mathbb{H}$ est très naturellement liée à la composition des applications conformes.

Loewner s'est intéressé à la situation suivante. On se donne une courbe continue simple $\gamma : [0, \infty[\to \overline{\mathbb{H}}$ issue de $\gamma(0) = 0$, avec $\gamma(t) \in \mathbb{H}$ pour $t > 0$, et on prend $K_t := \gamma[0, t]$, de sorte que $(K_t, t \geqslant 0)$ est une famille de compacts simples de $\overline{\mathbb{H}}$ qui croît continûment. On suppose que $\lim_{t\to\infty} a(\gamma[0, t]) = \infty$, et pour simplifier, on se ramène au cas où la paramétrisation de γ est choisie de sorte que $a(K_t) = 2t$. Pour chaque $t \geqslant 0$, on posera $g_t := g_{K_t}$. Les applications conformes g_t permettent de transformer la courbe γ à valeurs dans $\mathbb{H}$ en une courbe $\omega : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(t) := g_t(\gamma(t)), \quad t \geqslant 0.$$

Loewner a établi une relation très simple entre les applications conformes g_t et la courbe réelle ω (voir par exemple [1]).

Proposition 2.1. — *Pour tout $z \in \overline{\mathbb{H}}$, $g_t(z)$ vérifie l'équation différentielle*

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \omega(t)}, \quad g_0(z) = z. \tag{2}$$

Cette équation est satisfaite jusqu'au premier temps T_z en lequel $g_t(z) = 0$.

Il est également naturel de prendre un autre point de vue. Au lieu de partir d'une courbe simple γ dans $\overline{\mathbb{H}}$ et de construire la courbe réelle ω, on se donne une fonction $\omega : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ avec $\omega(0) = 0$, puis on construit pour chaque $z \in \overline{\mathbb{H}}$ une fonction $t \mapsto g_t(z)$ en résolvant l'équation (2). Cette dernière est bien définie jusqu'à ce que $g_t(z) - \omega(t)$ atteigne 0, temps que l'on note T_z. Introduisons encore

$$K_t = \left\{z \in \overline{\mathbb{H}} : T_z \leqslant t\right\}. \tag{3}$$

On appelle $(K_t, t \geqslant 0)$ la *chaîne de Loewner* associée à la fonction ω. On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.2. — *Avec les notations et hypothèses précédentes, pour tout $t > 0$, g_t est la transformation conforme normalisée de $\mathbb{H}\backslash K_t$ vers $\mathbb{H}$.*

Remarque 2.3. — Lorsque la fonction ω est suffisamment régulière (plus précisément, hölderienne d'ordre 1/2 avec un coefficient de Hölder assez petit), la fonction réciproque g_t^{-1} se prolonge continûment à $\omega(t) \in \partial\mathbb{H}$ (voir [13]). On peut alors récupérer une courbe γ par l'identité $\gamma(t) = g_t^{-1}(\omega(t))$, de sorte que les compacts K_t sont donnés par des courbes simples $\gamma : [0, \infty[\to \overline{H}$. Mais en général, K_t n'est pas nécessairement donné par une courbe simple.

2.2. SLE cordal

Schramm [15] a introduit la notion d'évolution de Loewner stochastique en prenant pour la fonction ω dans les propositions 2.1–2.2, un mouvement brownien réel de variance $\kappa > 0$, *i.e.*

$$\omega(t) = W_t = \sqrt{\kappa} B_t,$$

où $(B_t, t \geqslant 0)$ est un mouvement brownien standard. Pour un probabiliste, ce choix est bien sûr très naturel, car les mouvements browniens sont les seuls processus aléatoires à trajectoires continues, qui vérifient une propriété d'invariance par changement d'échelle, et dont les accroissements sont indépendants.

DÉFINITION 2.4 (Schramm). — *Pour $\kappa > 0$, on appelle SLE_κ cordal la chaîne de Loewner associée à un mouvement brownien $(W_t, t \geqslant 0)$ de variance κ.*

Le qualificatif *cordal* fait référence au fait que la famille de compacts $(K_t, t \geqslant 0)$ croît entre deux points de la frontière $\partial\mathbb{H}$ du domaine, 0 et ∞. Schramm a construit également des processus SLE radiaux, *i.e.* pour lesquels les compacts croissent d'un point de la frontière jusqu'à atteindre un point intérieur donné. Dans cet exposé, nous nous concentrerons sur le cas cordal, à l'exception de la section 4.4.

Sans entrer dans les détails, ayant défini $(K_t, t \geqslant 0)$, SLE_κ cordal dans $\mathbb{H}$ croissant de 0 vers ∞, pour tout domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$, et A, B deux points distincts de la frontière de D, on construit SLE_κ dans D croissant de A vers B en considérant $(g(K_t), t \geqslant 0)$, où $g : \mathbb{H} \to D$ désigne une application conforme avec $g(0) = A$ et $g(\infty) = B$.

Les propriétés de base du mouvement brownien se traduisent aisément pour SLE :

– Le brownien est symétrique, *i.e.* W et $-W$ ont la même loi ; il en découle que si $\widetilde{K}$ désigne le symétrique de K par rapport à l'axe imaginaire, alors $(K_t, t \geqslant 0)$ et $(\widetilde{K}_t, t \geqslant 0)$ ont la même loi.

– Invariance par changement d'échelle, *i.e.* pour tout $c > 0$, $(W_t, t \geqslant 0)$ et $(c^{-1/2} W_{ct}, t \geqslant 0)$ ont la même loi. Il s'ensuit que $(K_{ct}, t \geqslant 0)$ et $(cK_t, t \geqslant 0)$ ont la même loi.

– Propriété de Markov : si T est un temps d'arrêt dans $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, la filtration naturelle de W, alors $(W_{T+t} - W_T, t \geqslant 0)$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$. Il s'ensuit que le processus $(g_{T+t}(K_{T+t} \backslash K_T) - W_T, t \geqslant 0)$ est également indépendant de $\mathcal{F}_T$ et est encore un SLE_κ.

La propriété suivante, due à Rohde et Schramm [14], fait appel à des propriétés plus fines du brownien.