Séminaire BOURBAKI Mars 2004
56^{e} année, 2003-2004, n^{o} 931, p. 165 à 193

OBSTRUCTIONS AU PRINCIPE DE HASSE ET À L'APPROXIMATION FAIBLE

par **Emmanuel PEYRE**

INTRODUCTION

Face à un système d'équations polynomiales à coefficients entiers, les questions de l'existence d'une solution à coordonnées entières ou rationnelles sont les premières qui viennent à l'esprit. Bien que les travaux de Davis, Putnam, Robinson, Matijacevič et Čudnovskiĭ (*cf.* [Az] et [Ma2]) sur le dixième problème de Hilbert aient montré que l'existence d'une solution entière ne peut être déterminée de façon algorithmique, le problème analogue sur $\mathbf{Q}$ est toujours ouvert et il est raisonnable de chercher des critères d'existence de solutions rationnelles pour certaines classes de variétés. Une condition nécessaire évidente pour l'existence d'une telle solution est l'existence d'une solution sur le corps des réels et sur tout complété p-adique de $\mathbf{Q}$. Hasse fut le premier à étudier de manière systématique la réciproque de cette condition nécessaire. En s'appuyant sur les progrès du corps de classes, il put démontrer cette réciproque pour certaines classes de variétés, dont les quadriques [Hasse1], qui avaient été antérieurement étudiées par Legendre et Minkowski [Mi]. Mais ce passage du local au global ne s'étend pas à tout système d'équations. Hasse lui-même donna des contre-exemples à cette réciproque [Hasse2]. Par la suite, ceux-ci se multiplièrent : Reichardt [Re] et Lind [Li] vers 1940 produisirent de manière indépendante une courbe de genre un, intersection de deux quadriques qui n'admet pas de points sur $\mathbf{Q}$ mais en admet sur tous ses complétés (cet exemple est également décrit dans [Ca]). La construction d'autres contre-exemples parmi les variétés géométriquement rationnelles demanda plus de temps, mais Swinnerton-Dyer en exhiba en 1962 au sein des surfaces cubiques non singulières [SD1]. En 1970, dans son exposé au congrès international de Nice [Ma1], Manin décrivit un critère général basé sur la formule de réciprocité de la théorie du corps de classes qui permit d'expliquer tous les contre-exemples antérieurs (*cf.* [CTKS]). De manière plus précise, supposons que V soit une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur $\mathbf{Q}$ et notons $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ l'espace adélique associé à V, c'est-à-dire l'espace topologique produit $V(\mathbf{R}) \times \prod_p V(\mathbf{Q}_p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers. Le principe du critère de Manin est de construire une partie $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ qui contient l'adhérence de l'ensemble des points rationnels dans l'espace adélique. Si $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}) \neq \varnothing$ mais que $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ est vide, alors V n'admet pas de point rationnel sur $\mathbf{Q}$, alors qu'elle en admet sur tous ses complétés. Cette construction fournit également des contre-exemples à l'approximation faible : si $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$, alors les points rationnels de V ne sont pas denses dans l'espace adélique (*cf.* [CTS3]).

Muni de cette construction, on peut alors affiner les questions précédentes de la façon suivante : étant donnée une variété projective, lisse et géométriquement intègre telle que $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ soit non vide,

– la variété V admet-elle un point rationnel ?
– L'ensemble de ces points rationnels est-il dense dans $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$?

Ces questions ont été explorées par de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer Borovoi, Colliot-Thélène, Harari, Salberger, Sansuc, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer et une réponse positive à la seconde question fut obtenue pour diverses classes de variétés géométriquement rationnelles. Deux types de méthodes se sont révélées particulièrement efficaces. La première dite de descente consiste à construire des morphismes

$$f_i : W_i \longrightarrow V$$

de sorte que W_i soit plus simple du point de vue arithmétique et de déduire le résultat pour V des propriétés des W_i. Cette méthode fut systématisée par Colliot-Thélène et Sansuc ([CTS1], [CTS2], [CTS3], [CTS4] et [CTS5]) à l'aide des torseurs universels. La seconde dite de fibration s'applique dans le cas où l'on dispose d'un morphisme

$$p : V \longrightarrow B.$$

On cherche alors à déduire le résultat pour V des résultats connus pour les fibres de p.

Tous les experts se doutaient que la non-vacuité de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ n'entraîne pas toujours celle de $V(\mathbf{Q})$, mais l'obtention d'un tel contre-exemple se révéla difficile. En 1999, dans [Sk3], Skorobogatov fut le premier à exhiber un exemple explicite de variété V vérifiant $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$ et ne possédant pas de points rationnels. Ce contre-exemple peut s'expliquer à l'aide d'un analogue non commutatif de l'obstruction de Brauer-Manin dû à Harari et Skorobogatov [HS]. Par ailleurs, Sarnak et Wang en 1995 dans [SW], puis Poonen en 2001 dans [Po] montrent que des conjectures de Lang impliquent l'existence de variétés sans point rationnel qui échappent au critère de Manin et à ses généralisations non abéliennes.

Dans la première partie de ces notes, nous revenons sur les notions de principe de Hasse et d'approximation faible, la seconde partie est consacrée à la description du critère de Brauer-Manin, la troisième aux méthodes utilisées pour montrer la densité des points rationnels dans l'espace $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ et la quatrième aux contre-exemples à cette densité. Nous terminons par des extensions de cette démarche à d'autres cadres.

1. LE PRINCIPE DE HASSE ET L'APPROXIMATION FAIBLE

1.1. Terminologie

Fixons quelques notations pour la suite de cet exposé.

Notations 1.1. — Désormais K désigne un corps de nombres, $\mathscr{O}_K$ son anneau des entiers et M_K l'ensemble des places de K. Pour toute place v de K, on note K_v le complété de K pour la topologie définie par v. Si la place v est non archimédienne, on note $\mathscr{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v. Si $\mathscr{X}$ est un schéma sur le spectre d'un anneau A et B une A-algèbre commutative, on note $\mathscr{X}(B)$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(B), \mathscr{X})$ et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B)$. En particulier, si V est une variété sur un corps F, $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et F^s la clôture séparable de F dans $\overline{F}$, $V(F)$ est l'ensemble des points rationnels de V et $\overline{V}$ (resp. V^s) désigne la variété $V_{\overline{F}}$ (resp. V_{F^s}) sur $\overline{F}$ (resp. F^s).

Nous dirons qu'une variété V sur un corps F est une *bonne variété* si elle est projective, lisse et géométriquement intègre. Deux variétés intègres V et W sur F sont *F-birationnellement équivalentes* si un ouvert non vide de V est isomorphe à un ouvert de W. Une variété intègre V est dite *F-rationnelle* si elle est F-birationnellement équivalente à un espace projectif. Une variété géométriquement intègre V est dite *géométriquement rationnelle* si $\overline{V}$ est $\overline{F}$-rationnelle.

Une bonne variété V sur un corps F est dite *F-rationnellement connexe* s'il existe une variété M, un ouvert non vide U du produit $\mathbf{P}^1 \times M$ et un morphisme $e : U \to V$ de sorte que l'application induite $U \times_M U \to V \times_F V$ soit dominante. On dit que V est *géométriquement rationnellement connexe* si $\overline{V}$ est $\overline{F}$-rationnellement connexe ; autrement dit, il existe une famille de courbes rationnelles sur $\overline{V}$ de sorte que deux points généraux de $V(\overline{F})$ puissent être reliés par une courbe de cette famille.

Si V est une variété irréductible et $\mathscr{V}$ un modèle de V sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$, c'est-à-dire que $\mathscr{V}_K$ est isomorphe à V, alors pour toute place non archimédienne v de K, on a une application naturelle $j_v : \mathscr{V}(\mathscr{O}_v) \to V(K_v)$. L'espace des adèles associé à V est défini comme l'ensemble des $(x_v)_{v \in M_K}$ du produit $\prod_{v \in M_K} V(K_v)$ tels que x_v appartienne à l'image de j_v pour tout v en dehors d'une partie finie de M_K. Cet espace topologique est indépendant du modèle choisi et si V est projective, il coïncide avec le produit.

1.2. Passage du local au global

Si V est une variété sur le corps de nombres K, on a une implication évidente :

$$(1) \qquad V(K) \neq \varnothing \implies \forall\, v \in M_K,\ V(K_v) \neq \varnothing.$$

L'intérêt de ce critère provient du fait qu'il est algorithmiquement possible de déterminer si la condition

$$\forall\, v \in M_K,\ V(K_v) \neq \varnothing$$

est vérifiée ou pas. En effet, si K_v est isomorphe au corps des réels, la vacuité de $V(K_v)$ est une question décidable grâce aux travaux de Tarski et Seidenberg (*cf.* [Ta] et [Sei]) ; le lemme de Hensel et ses généralisations montrent que pour toute place non archimédienne v de K correspondant à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{O}_K$, déterminer si $V(K_v)$ est non vide se réduit à étudier des solutions d'équations polynomiales sur $\mathscr{O}_K/\mathfrak{p}^n$ pour un n convenable et, par conséquent, est décidable. Enfin les estimations de Lang-Weil [LW] permettent de montrer que si V n'est pas vide, alors $V(K_v) \neq \varnothing$ pour toute place v en dehors d'une partie finie de M_K que l'on peut déterminer explicitement.

Hasse fut le premier à étudier de façon systématique la réciproque de l'implication (1). Il énonça en particulier le résultat suivant :

Théorème 1.2 (Hasse [Hasse1], Minkowski [Mi]). — *Une forme quadratique* $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ *à coefficients dans* $\mathbf{Q}$ *admet un zéro non trivial dans* $\mathbf{Q}^n$ *si et seulement si elle en a sur tout complété de* $\mathbf{Q}$.

Le cas $n = 2$ est élémentaire, le cas $n = 3$ remonte à Legendre. La difficulté de la démonstration réside dans le passage de trois à quatre variables qui utilise le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet et la formule de réciprocité de Gauss. Nous suggérons à l'auditeur de cet exposé qui n'aurait jamais lu la démonstration de ce théorème de se reporter à l'article de Hasse [Hasse1] ou au cours d'arithmétique de Serre [Se2]. Ce résultat se généralise à tout corps de nombres.

Une autre famille d'équations considérée par Hasse est celle associée aux normes d'extensions galoisiennes cycliques de corps.

Théorème 1.3 (Hasse [Hasse2]). — *Soit* L/K *une extension galoisienne cyclique de corps de nombres. Notons* $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$ *le morphisme de norme. Un élément* a *de* $K^\times$ *appartient à son image si et seulement si, pour toute place* v *de* K *et toute extension* w *de* v *à* L, a *appartient à l'image de la norme* N_{L_w/K_v}.

Dans ce cas, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base du K-espace vectoriel L, la variété considérée est la variété affine définie par l'équation

$$N_{L/K}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i e_i\Big) = a.$$

1.3. Le principe de Hasse et l'approximation faible

Pour une variété V arbitraire sur un corps de nombres K, il est aisé de donner des contre-exemples à la réciproque de (1). Considérons par exemple le polynôme

$$P(X) = (X^2 - 3)(X^2 + 3)(X^2 + 1)(X^2 + 23).$$

Pour tout nombre premier p impair, le groupe $\mathbf{F}_p^\times/\mathbf{F}_p^{\times 2}$ est cyclique d'ordre 2. Par conséquent si $p \geqslant 5$, au moins un des entiers -1, 3 ou -3 est un carré modulo p et donc dans $\mathbf{Q}_p$. D'autre part -23 est un carré dans $\mathbf{Q}_2$ et $\mathbf{Q}_3$. Enfin 3 est un carré sur $\mathbf{R}$. Le polynôme P a donc une racine dans chacun des complétés de $\mathbf{Q}$. Toutefois, il n'a pas de racine sur $\mathbf{Q}$.

Plus généralement, si $(V_i)_{i\in I}$ est une famille finie de sous-variétés d'une variété V sur le corps de nombres K telle que

$$\forall\, v \in M_K,\ \exists\, i \in I, \quad V_i(K_v) \neq \varnothing$$

et

$$\forall\, i \in I,\ \exists\, v \in M_K, \quad V_i(K_v) = \varnothing,$$

alors $\bigcup_{i\in I} V_i$ est un contre-exemple à la réciproque de (1).

D'autre part, si on considère la surface affine S d'équation

$$Y^2 + Z^2 = -(X^2 - 3)^2(X^2 + 3)(X^2 + 1)(X^2 + 23),$$

cette surface est irréductible, les remarques faites sur les racines de P montrent qu'elle admet un point sur chaque complété de $\mathbf{Q}$, mais ses seuls points réels sont $(\sqrt{3}, 0, 0)$ et $(-\sqrt{3}, 0, 0)$ qui ne sont pas définis sur $\mathbf{Q}$. On obtient à nouveau un contre-exemple à la réciproque de (1). Là encore, cet exemple se généralise aisément en considérant des variétés dont les seuls points sur un des complétés sont des points singuliers.

Par contre, si V est une variété géométriquement irréductible, v une place de K et x_0 un point lisse de $V(K_v)$, le théorème des fonctions implicites [Bki, VAR, § 1, n° 5] assure qu'il existe un homéomorphisme d'un voisinage ouvert de x_0 pour la topologie v-adique sur un ouvert de $K_v^{\dim(V)}$. En particulier, $V(K_v)$ est dense dans V_{K_v} pour la topologie de Zariski. Les arguments qui précèdent ne permettent donc plus de montrer la vacuité de $V(K)$.

Ces considérations amènent aux définitions qui suivent :

DÉFINITION 1.4. — *On dira par la suite qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K vérifie* le principe de Hasse *si et seulement si elle vérifie l'implication suivante*

$$(\forall\, v \in M_K,\ V(K_v) \neq \varnothing) \quad \Longrightarrow \quad V(K) \neq \varnothing.$$

On dira qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K vérifie l'approximation faible *si et seulement si l'ensemble des points rationnels $V(K)$ est dense dans l'espace topologique produit $\prod_{v\in M_K} V(K_v)$.*