

## COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ

par Jean-Pierre SERRE

### 1. INTRODUCTION : LE CAS DU GROUPE LINÉAIRE

#### 1.1. Rappels

Soient  $k$  un corps commutatif et  $\Gamma$  un groupe. Un  $\Gamma$ -module (ou une *représentation linéaire* de  $\Gamma$ ) est un  $k$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie, muni d'une action linéaire de  $\Gamma$ .

On dit que :

(1.1.1)  $V$  est *irréductible* (ou *simple*) si  $V \neq 0$  et si  $V$  ne contient aucun sous- $\Gamma$ -module distinct de 0 et de  $V$ .

(1.1.2)  $V$  est *complètement réductible* (ou *semi-simple*) si  $V$  est somme directe de  $\Gamma$ -modules irréductibles.

(1.1.3)  $V$  est *indécomposable* si  $V \neq 0$ , et si  $V$  n'est pas somme directe de deux sous- $\Gamma$ -modules  $\neq 0$ .

[Dans la suite, nous abrégons en écrivant *ir*, *cr*, *ind* respectivement.]

Les propriétés suivantes sont bien connues :

(1.1.4)  $V$  est *cr* si et seulement si, pour tout sous-module  $W$  de  $V$ , il existe un sous-module  $W'$  de  $V$  tel que  $V = W \oplus W'$ .

(1.1.5) Si  $V$  est somme directe de sous-modules  $V_i$ , alors  $V$  est *cr*  $\Leftrightarrow$  tous les  $V_i$  sont *cr*.

On connaît moins bien les propriétés relatives au produit tensoriel  $V \otimes V'$  de deux représentations  $V$  et  $V'$ . La plupart des cours d'Algèbre se bornent à définir le produit en question, et à en démontrer des propriétés évidentes. Aucun, à ma connaissance, ne signale le résultat très frappant suivant, dû à Chevalley :

THÉORÈME 1.1 ([Ch55, p.88]). — *Supposons  $k$  de caractéristique 0. Si  $V$  et  $V'$  sont des  $\Gamma$ -modules complètement réductibles, leur produit tensoriel  $V \otimes V'$  est complètement réductible.*

(Noter que l'on ne fait aucune hypothèse sur le groupe  $\Gamma$ .)

Lorsqu'on veut étendre ce théorème à la caractéristique  $p$  (avec des conditions restrictives sur  $\dim V$  et  $\dim V'$ , cf. prop.5.8), il est utile de disposer d'une notion de *complète réductibilité* dans laquelle le groupe linéaire  $\mathbf{GL}(V)$  est remplacé par un groupe réductif quelconque. Cette notion peut se définir, soit en termes de sous-groupes paraboliques, soit en termes d'*immeubles de Tits*, cf. [Se97b], [Se98]. C'est ce que nous allons voir. Les §§ 2,3 contiennent les énoncés généraux, et les §§ 4,5 donnent des critères plus précis, ainsi que diverses applications.

## 1.2. Exemple : l'immeuble de $\mathbf{GL}(V)$

Soit  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On supposera  $n \geq 2$  (sinon, l'immeuble correspondant est vide).

1.2.1. *Définition.* — L'immeuble de  $\mathbf{GL}(V)$ , appelé aussi immeuble de  $V$ , est un complexe simplicial  $X = X(V)$ , de dimension  $n - 2$ , qui est défini de la manière suivante :

- les sommets de  $X$  correspondent bijectivement aux sous-espaces vectoriels de  $V$  distincts de 0 et de  $V$ . (Si  $W$  est un tel sous-espace, on note  $x_W$  le sommet correspondant.)

- un ensemble  $s$  de sommets de  $X$  est un simplexe de  $X$  si et seulement si les sous-espaces vectoriels correspondants forment un drapeau, i.e. une filtration strictement croissante de  $V$ . [Si l'on préfère la géométrie projective à la géométrie affine, on peut aussi voir les sommets de  $X$  comme les sous-variétés projectives de l'espace projectif  $\mathbf{P}(V)$ , distinctes de  $\emptyset$  et de  $\mathbf{P}(V)$ .]

1.2.2. *Type.* — Si  $x = x_W$  est un sommet de  $X$ , on note  $\text{type}(x)$  la dimension de l'espace vectoriel  $W$ . L'ensemble des types de sommets est l'ensemble  $I = \{1, \dots, n - 1\}$ .

1.2.3. *Opposition.* — Deux sommets  $x = x_W$  et  $x' = x_{W'}$  sont dits *opposés* si  $V$  est somme directe de  $W$  et  $W'$ ; leurs types se correspondent par l'involution  $t \mapsto n - t$  de  $I$ . Deux simplexes sont *opposés* si tout sommet de l'un est opposé à un sommet de l'autre. En termes de filtrations, cela correspond à la notion usuelle de *filtrations opposées*.

1.2.4. *Sous-groupes paraboliques.* — Les sous-groupes paraboliques de  $\mathbf{GL}(V)$  sont les stabilisateurs des drapeaux de  $V$ . Les sous-groupes paraboliques *propres* (i.e. distincts de  $\mathbf{GL}(V)$ ) correspondent donc aux simplexes non vides de l'immeuble  $X$ ; les paraboliques maximaux correspondent aux sommets de  $X$  et le groupe  $\mathbf{GL}(V)$  au simplexe  $\emptyset$ . Deux simplexes  $s$  et  $s'$ , correspondant aux paraboliques  $P$  et  $P'$ , sont opposés au sens du n° 1.2.3 si et seulement si  $P$  et  $P'$  sont opposés au sens

usuel du terme, c'est-à-dire si  $P \cap P'$  est un sous-groupe de Levi de chacun d'eux, cf. [BT65, 4.8].

**1.2.5. Appartements.** — Soit  $T$  un tore déployé maximal de  $\mathbf{GL}(V)$ . L'action de  $T$  sur  $V$  décompose  $V$  en somme directe de droites  $D_i$ . Si, dans la définition de  $X$ , on se restreint aux  $W$  qui sont sommes directes de certaines des  $D_i$ , on obtient un sous-complexe  $C$  de  $X$  qui est isomorphe au *complexe de Coxeter* du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ . D'un point de vue combinatoire, c'est la subdivision barycentrique du bord d'un  $(n-1)$ -simplexe; topologiquement, c'est une sphère de dimension  $n-2$ . Un sous-complexe de  $X$  obtenu de cette façon est appelé un *appartement* de  $X$ . Par construction, les appartements correspondent aux tores déployés maximaux de  $\mathbf{GL}(V)$ .

**1.2.6. Exemple.** — Prenons  $n = 3$ . L'immeuble correspondant est un *graphe*, qui a deux types de sommets : ceux qui correspondent aux points du plan projectif et ceux qui correspondent aux droites. Deux sommets sont voisins (i.e. sont les extrémités d'une arête) si et seulement si ils correspondent à un point situé sur une droite : la relation de voisinage est la relation d'incidence. Les appartements sont les hexagones  $a - B - c - A - b - C - a$  associés aux triangles  $ABC$ , de côtés  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$  : la théorie de Tits transforme triangles en hexagones !

### 1.3. Traductions immobilières : le cas de $\mathbf{GL}(V)$

Si  $V$  est un  $\Gamma$ -module, le groupe  $\Gamma$  opère de façon naturelle sur l'immeuble  $X = X(V)$  du n° 1.2. Cette action respecte les types (au sens du n° 1.2.2). En particulier, si un simplexe  $s$  de  $X$  est stable par  $\Gamma$ , il est fixé par  $\Gamma$ . Si  $P$  est le sous-groupe parabolique correspondant à  $s$ ,  $P$  est normalisé par  $\Gamma$ , i.e. contient  $\Gamma$  (puisque un parabolique est son propre normalisateur). Le sous-espace  $X^\Gamma$  des points fixes de  $\Gamma$  est un *sous-complexe simplicial* de  $X$ , et les définitions du n° 1.1 se traduisent de la façon suivante :

(1.3.1)  $V$  est *irréductible*  $\Leftrightarrow X^\Gamma = \emptyset \Leftrightarrow \Gamma$  n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de  $\mathbf{GL}(V)$ .

(1.3.2)  $V$  est *complètement réductible*  $\Leftrightarrow$  pour tout sommet  $x$  de  $X^\Gamma$  il existe un sommet  $x'$  de  $X^\Gamma$  qui est opposé à  $x$  (cf. 1.2.3)  $\Leftrightarrow$  pour tout parabolique maximal  $P$  contenant  $\Gamma$ , il existe un parabolique  $P'$  opposé à  $P$  qui contient  $\Gamma$ .

(1.3.3)  $V$  est *indécomposable*  $\Leftrightarrow X^\Gamma$  ne contient aucun couple de sommets opposés  $\Leftrightarrow$  il n'existe pas de couple  $(P, P')$  de paraboliques propres de  $\mathbf{GL}(V)$  qui soient opposés et contiennent tous deux  $\Gamma$ .

Il n'est pas difficile de montrer que (1.3.2) équivaut à :

(1.3.2') pour tout simplexe  $s$  de  $X^\Gamma$ , il existe un simplexe  $s'$  de  $X^\Gamma$  qui est opposé à  $s \Leftrightarrow$  pour tout parabolique  $P$  (maximal ou pas) contenant  $\Gamma$ , il existe un parabolique opposé à  $P$  qui contient  $\Gamma$ .

## 2. LA COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ DANS LES IMMEUBLES SPHÉRIQUES

### 2.1. Immeubles sphériques

Un immeuble sphérique est un complexe simplicial  $X$ , muni d'une famille de sous-complexes appelés *appartements*. Je renvoie à [Ti74] pour la liste des axiomes ; voir aussi [Br89], [Ron89] et [TW02, § 40]. Voici quelques-unes des propriétés de ces immeubles :

*2.1.1. Dimension et rang.* — Le complexe  $X$  est de dimension finie. L'entier  $r = \dim(X) + 1$  est appelé le *rang* de  $X$ . Lorsque  $X = \emptyset$ , on convient que  $\dim(X) = -1$ , de sorte que  $r = 0$ . Tout simplexe maximal est de dimension  $\dim(X)$ .

*2.1.2. Types des sommets.* — Soit  $\text{som}(X)$  l'ensemble des sommets de  $X$ . Il existe une unique relation d'équivalence  $R$  sur  $\text{som}(X)$  ayant les propriétés suivantes :

- (a) L'ensemble quotient  $\text{som}(X)/R$  a  $r$  éléments.
- (b) Deux sommets appartenant à un même simplexe ne sont  $R$ -équivalents que s'ils sont égaux.

Si  $x \in \text{som}(X)$ , l'image de  $x$  dans  $I = \text{som}(X)/R$  est appelée le *type* de  $x$ , et notée  $\text{type}(x)$ . On dit qu'un automorphisme  $f$  de  $X$  *préserve les types* si  $x$  et  $f(x)$  ont même type quel que soit  $x \in \text{som}(X)$ .

*Exemple.* — Lorsque  $X$  est l'immeuble  $X(V)$  du n° 1.2, on peut identifier  $I$  à  $\{1, \dots, n-1\}$ , cf. 1.2.2.

*2.1.3. Appartements.* — Un appartement est isomorphe au complexe de Coxeter d'un groupe de Coxeter fini qui ne dépend que de  $X$  ; c'est une sphère de dimension  $r-1$ . Deux simplexes quelconques sont contenus dans un appartement.

*2.1.4. Opposition et géodésiques.* — Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $X$  (c'est-à-dire de sa réalisation géométrique), et soit  $A$  un appartement les contenant. On dit que  $x$  et  $y$  sont *opposés* dans  $X$  s'ils le sont dans  $A$  (ce qui a un sens puisque  $A$  est un complexe de Coxeter) ; cela ne dépend pas du choix de  $A$ . Deux simplexes sont dits opposés si chaque sommet de l'un est opposé à un sommet de l'autre. Si  $x$  et  $y$  ne sont pas opposés, il y a une unique géodésique  $xy$  qui les joint dans  $A$ . Elle est indépendante (paramétrisation comprise) du choix de  $A$ .

*2.1.5. Convexité.* — Une partie  $Y$  de  $X$  est dite *convexe*, si l'on a  $xy \subset Y$  pour tout couple de points  $x, y$  de  $Y$ , non opposés. On dit que  $Y$  est *strictement convexe* si  $Y$  est convexe et ne contient aucun couple de points opposés (c'est la notion de « convexité » de [Ti74] et de [Mu65, p. 63]).

**2.1.6. Sphères de Levi.** — Une sphère de Levi est un sous-complexe  $S$  de  $X$ , qui est contenu dans un appartement  $A$ , et qui est l'intersection de  $A$  (vu comme sphère) avec un sous-espace vectoriel.

**2.1.7. Remarque.** — Ces définitions se présentent de façon un peu plus naturelle si l'on introduit l'immeuble vectoriel  $X^{\text{vect}}$  associé à  $X$ , dans lequel les points de  $X$  sont remplacés par des demi-droites, ayant en commun un point « 0 » (cf. [Rou78]). Les appartements deviennent alors des espaces vectoriels de dimension  $r$ , et les sphères de Levi des sous-espaces vectoriels définis par l'annulation de certaines racines. Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $X^{\text{vect}}$ , leur somme  $x + y$  a un sens, et l'on a

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

pourvu que  $x, y$  et  $z$  appartiennent à un même appartement. Deux points  $x$  et  $x'$  sont opposés si  $x + x' = 0$ . Une partie de  $X$  est convexe si le cône correspondant de  $X^{\text{vect}}$  est stable par  $(x, y) \mapsto x + y$ , autrement dit si son intersection avec tout appartement est un cône convexe au sens usuel du terme.

**2.1.8. Immeuble résiduel.** — Soit  $s$  un simplexe de  $X$  de dimension  $m$ . On note  $X_s$ , ou  $\text{St}(s)$ , l'immeuble résiduel (« link ») de  $X$  en  $s$ , cf. [Ti74]). Rappelons que les simplexes de  $X_s$  de dimension  $d$  correspondent bijectivement aux simplexes de  $X$  contenant  $s$  de dimension  $d + m + 1$  (de sorte que le simplexe vide de  $X_s$  correspond à  $s$ ). Si  $Y$  est un sous-complexe de  $X$ , les simplexes de  $Y$  contenant  $s$  définissent un sous-complexe  $Y_s$  de  $X_s$ ; si  $Y$  est convexe, il en est de même de  $Y_s$ .

Soit  $S$  une sphère de Levi, et soient  $s$  et  $s'$  deux simplexes de  $S$  de dimension maximale. Il y a un isomorphisme canonique  $\text{proj} : X_s \rightarrow X_{s'}$  (défini dans [Ti74, §3.19]). Ces isomorphismes satisfont à la condition de transitivité usuelle, ce qui permet d'écrire  $X_S$  à la place de  $X_s$ . L'immeuble  $X_S$  peut être appelé *l'immeuble* de  $S$ . Les sphères de Levi de  $X_S$  correspondent bijectivement aux sphères de Levi de  $X$  contenant  $S$ .

## 2.2. Complète réductibilité et contractibilité

**2.2.1. Définition.** — Une partie  $Y$  de  $X$  est dite *complètement réductible* (en abrégé :  $X$ -cr, ou simplement cr) si elle est convexe, et si, pour tout point  $y \in Y$ , il existe  $y' \in Y$  qui est opposé à  $y$ .

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout au cas où  $Y$  est un sous-complexe convexe de  $X$  (ou, parfois, de sa subdivision barycentrique); dans ce cas, la condition cr équivaut à dire que, pour tout simplexe  $s$  de  $Y$ , il existe un simplexe  $s'$  de  $Y$  qui est opposé à  $s$  (il suffit même que tout sommet de  $Y$  ait un opposé dans  $Y$ , cf. th. 2.2 ci-dessous).