Séminaire BOURBAKI Juin 2004
56^e année, 2003-2004, n^o 934, p. 249 à 265

MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES DANS L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN [d'après Christodoulou, Klainerman, Nicolò et Rodnianski]

par **Serge ALINHAC**

Dans cet exposé, nous présentons les outils développés dans les quinze dernières années par Christodoulou, Klainerman, Nicolò et Rodniansky, outils qui ont permis d'importants progrès dans l'étude des équations hyperboliques non-linéaires, notamment des équations d'Einstein. Il existe bien entendu beaucoup d'autres travaux sur ce sujet dont nous ne pourrons parler, et j'espère que leurs auteurs me pardonneront de m'être volontairement limité au choix retenu par Bourbaki. Pour ce qui est des aspects géométriques et physiques des équations d'Einstein, on consultera avec profit l'exposé de J.-P. Bourguignon [3] dans ce même séminaire. Notre propos est en quelque sorte complémentaire de celui de Bourguignon : il vise à rendre compte de façon un peu technique de méthodes qui se sont clarifiées au fil des ans, et dont le « cœur » apparaît dans de nombreux travaux.

1. LES PROBLÈMES

Nous ferons ici référence à trois groupes de travaux, très liés entre eux :

i) Les travaux de Klainerman [8] et Klainerman et Rodniansky [10] sur les équations d'ondes quasi-linéaires

$$\partial_t^2\phi - g^{ij}(\phi)\partial_{ij}^2\phi = N(\phi, \nabla\phi).$$

ii) Les travaux de Christodoulou et Klainerman [6], Klainerman et Nicolò [9] sur les équations d'Einstein $R_{\alpha\beta} = 0$.

iii) Les travaux de Klainerman et Rodniansky [11–16] sur les équations d'Einstein.

La discussion des travaux i), outre son intérêt intrinsèque, est utile pour mieux appréhender la démarche des travaux ii) et iii).

Dans tous les cas, il s'agit de problèmes qui s'écrivent dans des coordonnées bien choisies comme des systèmes hyperboliques non-linéaires, dont la partie principale est simplement $L_g \times \mathrm{Id}$, L_g étant le d'Alembertien associé à une métrique lorentzienne g. Il n'y a donc qu'*une seule géométrie* associée à de tels systèmes. Deux types de problèmes se posent alors :

A) Le problème de l'existence *globale en temps* de solutions C^∞ associées à des données de Cauchy elles-mêmes C^∞ et suffisamment décroissantes lorsque $|x| \to \infty$.

B) Le problème de l'existence *locale en temps* de solutions associées à des données de Cauchy peu régulières, par exemple dans un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$, avec s aussi petit que possible.

Dans le problème A, comme on peut le voir en consultant Hörmander [7] ou la première partie de l'exposé de Chemin [4], l'enjeu est de prouver la décroissance en temps, uniformément en espace, de la solution et de ses dérivées.

D'autre part, les problèmes A et B sont liés entre eux de deux façons :

i) Si l'on parvient à abaisser s jusqu'à un niveau contrôlé par une quantité « conservée » (comme l'énergie pour l'équation des ondes, par exemple), on obtient l'existence globale de solutions peu régulières.

ii) Une procédure d'attaque du problème B due à Bahouri et Chemin [1, 2], et reprise dans les références i), est la suivante : pour λ fixé grand, notons g_λ une régularisation de la métrique g ($g_\lambda \to g$ lorsque $\lambda \to \infty$) ; on établit alors l'équation (à coefficients régularisés) vérifiée par le « bloc » $\Delta_\lambda u$ (qui est, dans l'écriture de u à l'aide de sa transformée de Fourier $\widehat{u}(\xi)$, la partie de u pour laquelle $|\xi|$ est de l'ordre de λ)

$$L_{g_\lambda}(\Delta_\lambda u) = R_\lambda.$$

Après un changement d'échelle convenable, le problème se réduit à étudier la décroissance, sur un intervalle $[0, T]$, $T \leqslant \lambda^a$, $a > 0$, de la solution v d'une équation d'onde

$$L_{h_\lambda} v = 0,$$

où h_λ est une nouvelle métrique déduite de g. On peut alors « recoller » les informations sur les $\Delta_\lambda u$ pour obtenir l'estimation voulue sur la norme H^s de u.

Ce qui est important est que l'étude du problème A, comme celle du problème B par l'approche ii), se réduit à prouver la décroissance des solutions d'une équation *linéaire* associée à une métrique h déduite de g, et jouissant de propriétés connues (P). Le caractère *non-linéaire* du problème consiste en ceci : la métrique h dépend en fait de la solution ϕ. Il faut donc supposer certaines propriétés (Q) de ϕ sur un intervalle de temps $[0, T[$, qui impliquent les propriétés correspondantes (P) de h sur le même intervalle, lesquelles permettent d'établir que (Q) a lieu en fait sur un intervalle plus grand $[0, T + \varepsilon]$. C'est le procédé *d'induction sur le temps.*

Nous consacrerons les sections 2 à 6 à décrire les outils d'étude des équations linéaires, ne retournant aux aspects non-linéaires spécifiques qu'au paragraphe 7. La section 8, enfin, évoquera un travail en cours sur la « conjecture H^2 » pour les équations d'Einstein.

Notons que, dans un article récent [17], Lindblad et Rodniansky ont démontré l'existence globale de solutions régulières des équations d'Einstein écrites en coordonnées harmoniques, sans utiliser les outils géométriques qui font l'objet de cet exposé ; la contrepartie en est qu'ils ne semblent pas obtenir les propriétés asymptotiques fines des composantes de la courbure (« peeling properties ») telles qu'on peut les trouver dans [9], par exemple.

2. LE CŒUR DU DISPOSITIF : FEUILLETAGES, REPÈRES ET FONCTIONS OPTIQUES

Dans toute la suite de l'exposé, nous nous placerons dans $\mathbb{R}^4$, où nous tâcherons d'utiliser le moins possible les coordonnées usuelles

$$x^0 = t, \quad x = (x^1, x^2, x^3).$$

Nous supposerons donnée une métrique lorentzienne g, de signature $(-,+,+,+)$, le plus souvent proche de la métrique « plate » η de l'espace de Minkovski

$$\eta = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Les composantes de g en coordonnées locales seront $g_{\alpha\beta}$, et $g^{\alpha\beta}$ seront les éléments de la matrice inverse de $g_{\alpha\beta}$. Nous noterons $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$, et D la connexion canonique associée à g. Le gradient et le hessien d'une fonction f seront définis par

$$\langle \nabla f, X\rangle = Xf, \quad \nabla^2 f(X,Y) = XYf - (D_X Y)f,$$

le d'Alembertien associé à g étant l'opérateur

$$L_g f = g^{\alpha\beta}\nabla^2 f_{\alpha\beta}.$$

Nous considérerons dans la suite deux situations géométriques distinctes :

(I) Celle des travaux i) sur les équations d'ondes pour une métrique scindée

$$-dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j,$$

dans laquelle le feuilletage par les surfaces $\Sigma_{t_0} = \{t = t_0\}$ joue un rôle essentiel.

(II) Celle des travaux de Klainerman et Nicolò et Klainerman et Rodniansky sur les équations d'Einstein, dans lesquels aucune coordonnée n'apparaît *a priori*.

Pour le lecteur désireux d'approfondir, signalons que nous avons adopté les notations de [10] pour décrire la situation I, tandis que nous adoptons celles de [9] pour décrire la situation II. Enfin, au paragraphe 8, nous gardons les notations de [14].

Dans les deux situations géométriques, on suppose donné un feuilletage par des variétés de dimension deux, chacune homéomorphe à une 2-sphère standard. Ce feuilletage est tel qu'en chaque point $p \in S$, la restriction de g à l'orthogonal $H = (T_pS)^\perp$ est de signature $(-,+)$, et l'on note (e_3, e_4) des vecteurs isotropes de H, pointant vers le futur, de directions respectivement « rentrantes » et « sortantes » (*cf.* section 2). Si l'on choisit un repère orthonormé (e_1, e_2) sur S, on dispose ainsi d'un *repère isotrope* (e_1, e_2, e_3, e_4) (« null frame »), qui jouera un rôle central dans la suite (tous les tenseurs seront décomposés sur ce repère).

Si la collection des 3-plans engendrés par (e_1, e_2, e_4) est intégrable, on peut voir que les variétés intégrales correspondantes, les « cônes sortants », sont les surfaces de niveaux d'une fonction u vérifiant l'équation eikonale

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u = 0.$$

Une telle fonction est dite « fonction optique ». On définit également une fonction r, constante sur chaque sphère du feuilletage, par $4\pi r^2 = aireS$.

Dans la situation I, on définit d'abord une fonction optique u en imposant de plus $u = t - r$ infiniment près de l'axe des temps. Le feuilletage en sphères est alors

$$S_{t_0,u_0} = \{t = t_0, u = u_0\}.$$

En notant

$$L' = -\nabla u, b^{-1} = \partial_t u, \quad N = -b\partial^i u \partial_i,$$

on pose

$$e_4 = L = bL' = \partial_t + N, \quad e_3 = \underline{L} = \partial_t - N,$$

et l'on a les propriétés

$$\langle L, L\rangle = 0, \langle \underline{L}, \underline{L}\rangle = 0, \quad \langle L, \underline{L}\rangle = -2.$$

On notera qu'en général le système des 3-plans (e_1, e_2, e_3) n'est pas intégrable. On complète le dispositif en posant néanmoins $\underline{u} = 2t - u$.

Dans la situation II au contraire, on définit d'abord des fonctions optiques « entrantes » et « sortantes » $\underline{u}$ et u de la façon suivante :

i) On construit une fonction $\underline{u}_0$ sur $\Sigma_0 = \{t = 0\}$, dont les surfaces de niveaux jouissent de propriétés que nous expliquerons... à la section 7. On choisit alors pour $\underline{u}$ la solution entrante de l'équation eikonale qui vaut $\underline{u}_0$ pour $t = 0$. On se limite ici à un domaine de Σ_0 délimité par les deux surfaces $\underline{u}_0 = \nu_0$ et $\underline{u}_0 = \underline{u}_*$.

ii) Sur le cône rentrant $\underline{C}_* = \{\underline{u} = \underline{u}_*\}$ (que les auteurs appellent « the last slice »), on choisit une fonction u_* dont les surfaces de niveaux jouissent aussi de propriétés expliquées à la section 7. On définit alors u comme la solution sortante de l'équation eikonale valant u_* sur $\underline{C}_*$.

Une fois définies u et $\underline{u}$, on pose

$$L = -\nabla u, \quad \underline{L} = -\nabla \underline{u}, \quad 2\Omega^2 = -\langle L, \underline{L}\rangle^{-1} = -(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta \underline{u})^{-1},$$

et finalement on choisit

$$e_3 = 2\Omega\underline{L}, \quad e_4 = 2\Omega L$$

en sorte que $\langle e_3, e_4\rangle = -2$. Le feuilletage en sphères est finalement défini par

$$S_{\lambda,\nu} = \{u = \lambda, \underline{u} = \nu\}.$$

3. LES OBJETS GÉOMÉTRIQUES DANS L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI

Dans l'espace-temps de Minkowski, la situation géométrique de la section 2 est très simple : on choisit

$$u = t - r, \quad \underline{u} = t + r, \quad r = |x|, x = r\omega,$$

et donc

$$e_4 = L = -\nabla u = \partial_t + \partial_r, \quad e_3 = \underline{L} = -\nabla \underline{u} = \partial_t - \partial_r, \quad r\partial_r = x^i \partial_i.$$

Le feuilletage en sphères est celui des sphères standard dans les plans horizontaux, et des champs tangents à ces sphères sont

$$R_i = (x \wedge \partial)_i.$$

Dans la théorie des équations hyperboliques, tous ces objets ont des fonctions multiples plus ou moins « évidentes », que nous allons détailler, car il sera nécessaire de les distinguer plus tard.

1. Nous pouvons définir au moins deux notions d'infini : ce qui se passe lorsque $r \to \infty$, et ce qui se passe lorsque $\underline{u} \to \infty$, pour u fixé (« null infinity »). La première notion est claire, et les puissances de r apparaissent partout comme « poids » dans les estimations de décroissance cherchées. Par ailleurs, observons qu'une solution ϕ de l'équation des ondes avec données de Cauchy C_0^∞ peut s'écrire (*cf.* [7])

$$\phi(x, t) = (1/r)F(r - t, \omega, 1/r).$$

Pour u fixé, $r\phi$ a une limite qui est $F(-u, \omega, 0))$ (que l'on peut calculer explicitement à l'aide des tranformées de Radon des données [7]). Dans [9], les auteurs établissent toutes les limites de ce type, qui sont importantes pour l'interprétation physique des résultats.

2. Les cônes sortants et rentrants permettent de préciser les domaines de détermination de divers sous-ensembles, c'est-à-dire de préciser la structure causale de l'univers que l'on décrit.

3. Nous notons que

$$\partial_t = \frac{1}{2}(L + \underline{L}), \quad S = t\partial_t + x^i\partial_i = \frac{1}{2}(ue_3 + \underline{u}e_4),$$
$$K_0 = (t^2 + x^2)\partial_t + 2tx^i\partial_i = \frac{1}{2}(u^2 e_3 + \underline{u}^2 e_4).$$

Les champs ∂_t et K_0 sont utiles (entre autres choses) comme *multiplicateurs* permettant d'obtenir des inégalités d'énergie pour l'équation des ondes. Cela signifie que pour $X = \partial_t$ ou $X = K_0$, l'on calcule en intégrant par parties

$$\int_{[0,T]\times R^3} L_\eta \phi X \phi dx dt,$$