Séminaire BOURBAKI Novembre 2003
56e année, 2003-2004, nO 926, p. 29 à 57

RÉSULTATS RÉCENTS SUR LA LIMITE INCOMPRESSIBLE

par **Isabelle GALLAGHER**

1. INTRODUCTION

Les équations d'Euler compressibles modélisent le mouvement d'un fluide parfait (sans forces de viscosité interne) : elles s'écrivent sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires, portant sur le champ de vitesse et la densité du fluide. Ces équations s'obtiennent par minimisation d'une fonctionnelle d'énergie, dans l'espace des difféomorphismes (voir par exemple [2, 9]) : une particule au point x à l'instant t_0 est au point $\psi_1(x)$ au temps t_1, où ψ_1 est un difféomorphisme. La traduction de cette écriture lagrangienne en variables eulériennes conduit aux équations d'Euler compressibles. Les équations d'Euler incompressibles s'obtiennent quant à elles en se restreignant aux difféomorphismes préservant la mesure : le fluide est incompressible, et ainsi tout ouvert de l'espace est transporté en un ouvert de même volume au cours du mouvement. Le système d'équations aux dérivées partielles obtenu ne porte plus que sur le champ de vitesse (si l'on suppose de plus la densité constante), maintenant de divergence nulle. Le lecteur intéressé par l'obtention de ces équations à partir des lois fondamentales pourra par exemple consulter [39]. Les systèmes des fluides parfaits compressibles et incompressibles seront écrits précisément dans la section 1.1 suivante (systèmes (1) et (2) respectivement).

La question du passage du premier système (Euler compressible) au second (Euler incompressible), dans la limite où un « paramètre de compressibilité » (le nombre de Mach) tend vers zéro, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux mathématiques depuis une vingtaine d'années. Les motivations sont nombreuses : mathématiquement tout d'abord, les équations incompressibles sont mieux comprises que les équations compressibles, et il est intéressant d'essayer de transposer à l'un des systèmes des résultats connus pour l'autre, par un argument de comparaison ou de passage à la limite. Physiquement ensuite, on a souvent tendance à considérer qu'un fluide « peu compressible » possède des propriétés semblables à celles d'un fluide incompressible

— encore faut–il le justifier (voir par exemple [63] et [62]). Enfin dans des calculs numériques il est souvent préférable de considérer qu'un fluide est incompressible même lorsqu'il ne l'est pas, pour simplifier l'implémentation (voir à ce propos les travaux [36], [48], [52] et [53]).

Comme nous le verrons ici, ce problème du passage du compressible à l'incompressible fait intervenir des théories mathématiques variées, suivant l'espace physique dans lequel on plonge le fluide : ainsi des idées de l'optique géométrique sont utilisées dans le cas de conditions aux limites périodiques. Pour un fluide dans l'espace entier, ces aspects sont remplacés par des phénomènes dispersifs, et l'on fait appel à des estimations de type « Strichartz », ou encore à des techniques de mesures de défaut et des estimations de décroissance de l'énergie locale.

L'objectif de cet exposé est de donner un aperçu de « l'état de l'art » sur la question de la limite incompressible et de l'implémentation des techniques évoquées ci–dessus : nous verrons les différentes approches suivies depuis les travaux de S. Klainerman et A. Majda au début des années quatre–vingts dans le cas de « données bien préparées » (notion naturelle portant sur la donnée initiale, que nous présentons dans la section 1.1 ci–dessous) jusqu'aux travaux récents de G. Métivier et S. Schochet portant sur les équations non isentropiques (où l'on couple au système d'Euler compressible l'équation de transport de l'entropie).

Le plan de l'exposé est le suivant.

Dans la section 1.1 suivante, nous présentons les équations relatives aux fluides compressibles et incompressibles respectivement, et nous rappelons brièvement les résultats principaux concernant le problème de Cauchy pour ces deux systèmes. Suit dans la section 1.2 la mise en évidence du paramètre de compressibilité dans l'équation compressible ; on étudie alors la limite formelle de ce système (retrouvant ainsi le système incompressible), et les notions de données « bien » et « mal préparées » sont dégagées.

Le paragraphe 2 traite du cas où les données initiales sont bien préparées, au sens défini dans la section 1.2 ; les premiers travaux concernant la limite incompressible se sont attachés à comprendre ce cas, plus simple.

Dans le paragraphe 3, on s'intéresse au cas général des données mal préparées. On commence par l'étude du cas où les équations sont posées dans l'espace entier (sections 3.1.1 et 3.1.2) : le mot clef de ces études est la dispersion. On s'aperçoit immédiatement que le cas de domaines bornés ne peut être résolu par de tels arguments. Le cas des conditions aux limites périodiques est ainsi traité en détail dans la section 3.2.1, alors que le cas de domaines à bords est effleuré dans la section 3.2.2.

Le dernier paragraphe est consacré à des travaux récents de G. Métivier et S. Schochet concernant la limite incompressible dans le cas non isentropique. Les difficultés mises en évidence dans les paragraphes précédents pour le cas isentropique sont amplifiées ici par le transport couplé de l'entropie : le cas de l'espace entier présente déjà de nouvelles difficultés (surmontées) alors que le cas périodique reste encore largement à comprendre.

Remarque 1.1. — Le souci de concision nous a amenée à opérer de nombreuses « impasses » dans cette présentation. Ainsi nous avons choisi de ne pas parler de la dimension 1 d'espace (sauf à l'extrême fin de cet exposé pour étudier les équations des fluides non isentropiques), qui relève plutôt de techniques de lois de conservation ; nous renvoyons le lecteur intéressé par les problèmes spécifiques au cas monodimensionnel au livre de P.-L. Lions [40], Chapitre 8.7, et ses références. Notons que pour une étude d'oscillations dans le cas monodimensionnel on pourra aussi consulter l'article [17].

Nous ne parlerons pas non plus d'équations proches des équations d'Euler compressibles comme les équations de l'élasticité ou de la viscoélasticité, ni d'équations de la géophysique ou de la magnéto–hydrodynamique, qui soulèvent des problèmes mathématiques proches de ceux traités ici.

Enfin nous omettrons tout aspect lié à une éventuelle viscosité du fluide : les techniques pour traiter la limite incompressible dans le cas visqueux (passage de Navier–Stokes compressible à Navier–Stokes incompressible) sont bien sûr spécifiques dès que l'on cherche à utiliser l'effet régularisant du laplacien dans l'équation de Navier–Stokes (voir par exemple [10–12], [14], [42], [41] ou encore [46]), mais les effets purement « limite incompressible » sont indépendants de la présence ou non de viscosité — du moins tant qu'on ne traite pas de problèmes aux bords, nous y reviendrons en section 3.2.2 (pour d'autres travaux à ce sujet nous renvoyons le lecteur intéressé à [6], [15], [25], [37]).

Remerciements. — Je souhaite remercier P. Gérard pour de nombreux conseils sur la rédaction de ce texte. J'adresse aussi mes remerciements à R. Danchin et ainsi qu'à G. Métivier pour des discussions sur les questions évoquées ici.

1.1. Présentation des équations et rappels sur le problème de Cauchy

Considérons un fluide compressible parfait évoluant dans un domaine Ω (que nous préciserons) de l'espace d-dimensionnel $\mathbb{R}^d$, dont la vitesse et la densité en un point $x \in \Omega$ et à un instant $t \in \mathbb{R}^+$ sont notées respectivement $u(t,x)$ (vecteur à d composantes) et $\rho(t,x)$ (scalaire). Ces deux quantités sont reliées par les équations d'Euler compressibles (isentropiques) suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho u) &= 0 \\ \rho &\geqslant 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \rho^\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

avec $\gamma > 1$, et les conditions initiales

$$\rho_{|t=0} = \rho_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u_{|t=0} = u_0.$$

Les équations incompressibles quant à elles s'écrivent ainsi :

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \tag{2}$$

avec toujours la condition initiale $u_{|t=0} = u_0$. Dans l'équation d'Euler incompressible (2), la fonction scalaire p représente la pression du fluide (c'est une inconnue du système, due à la contrainte d'incompressibilité). Remarquons que la densité a été choisie constante dans (2), égale à un pour simplifier. Dans le cas d'un domaine borné (régulier) Ω, il convient de prescrire dans les deux équations une condition au bord : $u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

Rappelons quelques résultats sur le problème de Cauchy pour ces deux systèmes d'équations. Ce sont des EDP du premier ordre d'apparence très simple mais nos connaissances en sont relativement faibles : sur les équations compressibles par exemple, la théorie classique permet d'associer à une donnée initiale assez régulière une solution unique sur un temps maximal $[0, T_c]$, qui devient discontinue en T_c. Les solutions discontinues (simplement bornées par exemple) vérifiant l'équation au sens des distributions, ne sont ni uniques, ni stables : pour assurer leur stabilité (et parfois leur unicité), il faut imposer des restrictions, dites « conditions d'entropie de Lax » (voir la théorie de Lax [38]). Nous n'allons pas détailler ici cette théorie, mais simplement énoncer l'une de ses conséquences : dès que la dimension est plus grande que deux, il y a très peu d'entropies et donc très peu d'informations sur les solutions. Nous ne parlerons pas du problème de l'apparition de chocs ici, et notre étude partira du théorème fondamental suivant, qui se démontre en symétrisant le système (1) : en définissant la vitesse du son

$$c \overset{\text{déf}}{=} \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial(\rho^\gamma)}{\partial \rho} \right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma - 1}\, \rho^{(\gamma-1)/2}$$

le système d'Euler compressible (1) devient

$$\begin{aligned} \partial_t c + u \cdot \nabla c + \frac{\gamma - 1}{2} c \operatorname{div} u = 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\gamma - 1}{2} c \nabla c = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

et la théorie des systèmes symétriques hyperboliques conduit au théorème suivant (voir par exemple [43], et [44] ou [54] pour le cas de domaines à bords).

Théorème 1.2. — *Soit Ω un domaine régulier de l'espace $\mathbb{R}^d$, et soit s un entier strictement plus grand que $\frac{d}{2}+1$. Il existe une constante C telle que si (u_0, c_0) sont des éléments de $H^s(\Omega)$ (u_0 s'annulant au voisinage du bord par exemple), alors il existe un temps T et une unique solution (u, c) dans l'espace $C^0([0,T], H^s(\Omega))$ au système (3). En outre on a la minoration suivante sur le temps d'existence : $T \geqslant \dfrac{C}{\|(u_0, c_0)\|_{H^s(\Omega)}}$.*

Dans ce théorème (et partout dans ce texte), l'espace $H^s(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω, dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre s sont de carré intégrable. Dorénavant nous noterons s_0 le plus petit entier strictement plus grand que $\frac{d}{2}+1$. Notons que l'hypothèse d'annulation de la donnée initiale au voisinage du bord donnée dans l'énoncé du théorème 1.2 est l'une des conditions de compatibilité possibles (voir par exemple [54]). Notons en outre qu'il existe des solutions qui effectivement deviennent singulières en temps fini. Nous renvoyons le lecteur intéressé au travail de T. Sideris [58].

Concernant le système incompressible, la situation est un peu meilleure, du moins en dimension deux d'espace. En effet, en dimension deux, le tourbillon $\omega \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ est conservé le long des caractéristiques : il vérifie l'équation de transport $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$ grâce à la condition de divergence nulle sur le champ de vitesse. Cette remarque permet de montrer le théorème suivant (voir [9], [39], [45], [61]).

THÉORÈME 1.3. — *Soit Ω un domaine régulier de l'espace $\mathbb{R}^2$, et soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ dont le tourbillon ω_0 est un élément de $L^r(\Omega)$ pour un réel r dans l'intervalle $]1,+\infty[$. Alors il existe une solution $u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ telle que $\nabla u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^r(\Omega))$. Si $r=+\infty$, alors cette solution $u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ est unique, et le tourbillon est alors borné en temps et en espace.*

En dimension supérieure la situation est moins comprise, et le résultat est le suivant.

THÉORÈME 1.4. — *Soit Ω un domaine régulier de l'espace $\mathbb{R}^d$, et soit $s \geqslant s_0$. Si (u_0, c_0) est un élément de $H^s(\Omega)$, alors il existe une unique solution maximale $u \in C^0([0,T), H^s(\Omega))$. Si T est fini alors la norme de u dans $H^s(\Omega)$ tend vers $+\infty$ en T.*

Puisque nous souhaitons ici mettre en valeur les phénomènes intervenant dans la limite incompressible plus que les problèmes liés à l'étude du problème de Cauchy, nous n'avons pas énoncé tous les résultats dans leur plus grande généralité ni leur plus grande subtilité. Nous renvoyons le lecteur intéressé par exemple aux livres de J.-Y. Chemin [9] ou de P.-L. Lions [39] et [40] pour des résultats beaucoup plus précis.

1.2. La limite incompressible

Il y a de multiples façons de mettre en évidence le petit paramètre dans les équations des fluides compressibles (3) (voir par exemple [24] ou [34]). Nous présentons ici la méthode détaillée dans [50]. La limite incompressible étant comprise comme la limite où la vitesse du fluide devient négligeable devant la vitesse du son, on commence par remettre la vitesse à l'échelle, en remplaçant u par εu. Le paramètre ε est le nombre de Mach. La vitesse étant la dérivée de la position d'une particule de fluide par rapport au temps, une particule va donc se déplacer d'une distance $O(\varepsilon)$ pendant un temps de l'ordre de 1 (ou de même d'une distance de l'ordre de 1 en un temps $O(1/\varepsilon)$). Cela suggère de ré-échelonner les variables d'espace x en les remplaçant par x/ε (ou encore