

CAPACITÉ ANALYTIQUE ET LE PROBLÈME DE PAINLEVÉ

par Hervé PAJOT

1. INTRODUCTION

Nous dirons qu'un compact E du plan complexe est *effaçable* pour les fonctions holomorphes bornées si pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$ contenant E , toute fonction holomorphe bornée $f : U \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ admet une extension analytique dans U tout entier. Le *problème de Painlevé* consiste à donner une caractérisation métrique et/ou géométrique de ces ensembles effaçables. À ma connaissance, cette question est explicitement posée pour la première fois dans un article de Lars Ahlfors [1] en 1947. Dans ce papier, il introduit la capacité analytique $\gamma(E)$ définie par

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)| \mid f : \mathbb{C} \setminus E \longrightarrow \mathbb{C} \text{ est analytique et bornée avec } \|f\|_{\infty} \leq 1\}$$

(où $f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty))$) et il démontre que le compact E est effaçable si et seulement si $\gamma(E) = 0$. Cependant, comme l'écrit Ahlfors lui-même, cette réponse n'est pas satisfaisante, dans la mesure où l'étude de la capacité analytique n'est pas aisée. Avant la caractérisation des ensembles effaçables donnée par X. Tolsa [48] en 2003, les résultats connus étaient les suivants. Dans les faits 1, 2, 3 et 4, E est un compact du plan complexe.

Fait 1. — Si $H^1(E) = 0$ (où H^1 désigne la mesure de Hausdorff de dimension 1), alors E est effaçable.

Fait 2. — Si la dimension de Hausdorff de E (que nous noterons $\text{Hdiam}(E)$) est strictement plus grande que 1, alors E n'est pas effaçable.

Les faits 1 et 2 traduisent l'idée intuitive que la propriété d'être effaçable ou non devrait dépendre de la taille de l'ensemble. Ainsi, d'après un théorème de Riemann, un singleton est effaçable. D'un autre côté, grâce au théorème de représentation de Riemann, nous pouvons facilement nous convaincre qu'un continuum (c'est-à-dire un ensemble compact et connexe) du plan complexe qui n'est pas réduit à un point

ne l'est pas. Cependant, des exemples dus à Vitushkin, Ivanov et Garnett montrent que les seules considérations de taille ne suffisent pas à caractériser les ensembles effaçables. Les propriétés de rectifiabilité, c'est-à-dire d'approximation par des courbes lipschitziennes, doivent aussi jouer un rôle. Remarquons que les faits 1 et 2 impliquent que le cas « intéressant » est celui des compacts du plan de dimension de Hausdorff 1 qui satisfont à $H^1(E) > 0$.

Fait 3. — Supposons que E soit contenu dans une courbe lipschitzienne Γ . Alors, E est effaçable si et seulement si $H^1(E) = 0$.

Fait 4. — Si $H^1(E) < +\infty$, alors E est effaçable si et seulement si $H^1(E \cap \Gamma) = 0$ pour toute courbe lipschitzienne Γ .

Notons que le fait 1 implique le sens indirect du fait 3 et que celui-ci implique le sens direct du fait 4. Les démonstrations des faits 3 et 4 sont beaucoup plus difficiles que celles des faits 1 et 2. Alors que ces énoncés semblent plutôt liés à l'analyse complexe, leurs preuves requièrent des techniques fines d'analyse réelle (théorie des intégrales singulières de Calderón-Zygmund, en particulier dans les espaces non doublants) et de théorie de la mesure géométrique (problème du voyageur de commerce géométrique de Peter Jones, théorie de la rectifiabilité uniforme de David et Semmes). La condition de finitude de la mesure de Hausdorff dans l'énoncé du fait 4 est nécessaire. La solution proposée par Tolsa se passe de cette condition et donne donc une caractérisation complète des ensembles effaçables. Les progrès sur le problème de Painlevé ont été relativement lents. Il faut souligner que l'intérêt pour la capacité analytique a été relancé par les travaux de A.G. Vitushkin en théorie de l'approximation rationnelle [52] dans les années 1960. Le fait 1 est généralement attribué à Paul Painlevé lui-même [38]. Le fait 2 apparaît (sous une forme un peu différente) dans l'article de Lars Ahlfors [1]. Avant qu'une preuve complète en soit donnée, l'énoncé du fait 3 s'appelait « Conjecture de Denjoy ». En effet, A. Denjoy [14] l'avait démontré dans le cas où la courbe Γ est une droite et il pensait que sa démonstration s'étendait au cas des courbes lipschitziennes générales. Il n'en était rien, comme l'ont remarqué L. Ahlfors et A. Beurling [2]. En 1978, A.P. Calderón [3] démontrait la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens (à condition que la constante de Lipschitz soit suffisamment petite). Un corollaire de ce résultat (connu des experts, mais pas de Calderón) était le fait 3. Le fait 4 avait été conjecturé par A.G. Vitushkin (sans d'ailleurs l'hypothèse $H^1(E) < +\infty$ et sous une forme légèrement différente, voir section 2.1.2). À la suite d'une série de travaux de M. Christ, P. Jones, P. Mattila, M. Melnikov, J. Verdera entre autres, Guy David [9] donnera une preuve complète du fait 4 en 1998. Un outil d'apparence élémentaire joue un rôle important dans cette histoire. Il s'agit de la courbure de Menger. Étant donnés 3 points z_1, z_2, z_3 distincts

et non alignés du plan complexe $\mathbb{C}$, on définit leur courbure de Menger par

$$c(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{R(z_1, z_2, z_3)}$$

où $R(z_1, z_2, z_3)$ est le rayon du cercle circonscrit aux trois points. Si ces points ne sont pas distincts ou sont alignés, on pose $c(z_1, z_2, z_3) = 0$. Si μ est une mesure de Radon positive dans $\mathbb{C}$, on définit sa courbure de Menger par

$$c^2(\mu) = \iiint c(x, y, z)^2 d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de Tolsa.

THÉORÈME 1.1 (X. Tolsa). — *Soit E un compact du plan complexe. Alors, E n'est pas effaçable si et seulement si E supporte une mesure de Radon positive (non nulle) μ telle que*

(T1) *Il existe $C_0 > 0$ tel que $\mu(D(z, r)) \leq C_0 r$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, tout $r > 0$ ($D(z, r)$ est le disque ouvert de centre z et de rayon r).*

(T2) $c^2(\mu) < +\infty$.

Nous verrons dans la suite que (T1) est une condition sur la taille de l'ensemble, alors que (T2) est une condition de nature plus géométrique. Dans ce texte, une mesure satisfaisant (T1) sera dite à croissance linéaire (du volume).

Dans le paragraphe 2, nous introduirons les outils et les techniques d'analyse réelle et de théorie de la mesure géométrique dont nous aurons besoin pour expliquer la stratégie de démonstration de Tolsa. En particulier, nous verrons comment l'analyse harmonique s'est débarrassée de la condition de doublement du volume (travaux de Nazarov-Treil-Volberg et de Tolsa). Nous montrerons aussi comment déduire les faits 1, 2, 3 et 4 du théorème 1.1. Les démonstrations directes sont souvent plus simples, mais ceci permettra au lecteur de se convaincre que le résultat de Tolsa contient ce qui était connu avant et de se familiariser avec les diverses notions introduites au cours du texte. Dans le paragraphe 3, nous expliquerons comment la caractérisation de Tolsa permet de résoudre le problème de l'invariance par homéomorphismes bi-lipschitziens de la classe des ensembles effaçables. Nous discuterons dans le paragraphe 4 de problèmes ouverts autour de la capacité analytique et de la longueur de Favard, qui nous permettront de voir que la courbure de Menger n'est pas un objet aussi simple qu'il n'y paraît. Enfin, le paragraphe 5 sera consacré au cas (largement ouvert) de la dimension supérieure.

Je remercie L. Chevalier, G. David, J. Garnett, Y. Meyer, X. Tolsa, J. Verdera et A. Volberg pour leurs remarques sur des versions préliminaires de ce texte. L'auteur est partiellement supporté par le réseau européen TMR « Harmonic Analysis and Related Problems (HARP) ».

Je dédie avec beaucoup d'amour ces quelques lignes à mon fils, Hervé-Maurice, né et décédé le même jour. Un sombre jour de mai 2004.

2. DE L'ANALYSE COMPLEXE VERS L'ANALYSE RÉELLE

Nous allons dans un premier temps voir comment les propriétés de rectifiabilité peuvent être contrôlées par des quantités géométriques (comme les nombres β de Peter Jones et la courbure de Menger). Cela nous permettra de relier ces propriétés de rectifiabilité à la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy (voir par exemple le théorème 2.13). Nous pourrons alors donner quelques idées de démonstration du fait 4 (voir le début de la section 2.2.2) et du théorème 1.1.

2.1. Nombres géométriques et rectifiabilité

2.1.1. Mesures et dimension de Hausdorff. — Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et soit $d \in \mathbb{R}^+$. Nous définissons la d -mesure de Hausdorff de E par

$$H^d(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf \left\{ \sum_i (\text{diam } U_i)^d \mid E \subset \cup_i U_i, \text{diam } U_i < \delta \right\} \right).$$

Notons qu'ici les recouvrements considérés sont (au plus) dénombrables. Alors, H^d est une mesure de Borel régulière. Elle n'est pas de Radon (sauf si $d = n$) car elle n'est pas localement finie. Si $d = 0$, nous retrouvons la mesure de comptage. Pour une courbe de Jordan rectifiable Γ de $\mathbb{R}^n$, $H^1(\Gamma)$ est sa longueur. Enfin, H^n est égale (à une constante multiplicative près) à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^n$ de $\mathbb{R}^n$. Par un argument élémentaire, nous pouvons démontrer que $\inf\{s \mid H^s(E) = 0\} = \sup\{t \mid H^t(E) = +\infty\}$. Cette valeur commune est appelée la dimension de Hausdorff de E . Nous la noterons $\text{Hdiam}(E)$. Par exemple, la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor est $\log(2)/\log(3)$, celle d'une courbe de longueur finie est 1. Enfin, $\text{Hdiam}(\mathbb{R}^n) = n$. Un point-clé pour nous est le lemme de Frostman (voir [27] pour une démonstration, ainsi que pour plus de détails sur la théorie de la mesure géométrique) que voici :

THÉORÈME 2.1. — *Soit E un borélien de $\mathbb{R}^n$ et soit $d \geq 0$. Alors, $H^d(E) > 0$ si et seulement si E supporte une mesure de Radon positive μ (à support compact) telle que*

- (i) $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ (μ est une mesure de probabilité).
- (ii) *Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $\mu(B(x, R)) \leq C_0 R^d$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $R > 0$. Ici, et dans la suite, $B(x, R)$ désigne la boule euclidienne de centre x et de rayon R .*

Nous pouvons maintenant voir que le théorème de Tolsa implique le fait 1. En effet, soit E un compact du plan complexe tel que $H^1(E) = 0$. Alors, d'après le lemme de Frostman, E ne peut supporter une mesure μ à croissance linéaire (condition (T1) du théorème 1.1). Donc, E est effaçable. Signalons que le fait 1 peut se démontrer directement (et facilement) grâce à la formule de Cauchy (voir le théorème 64 dans [40]).

2.1.2. Rectifiabilité. — Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit d -rectifiable (au sens de la théorie géométrique de la mesure) s'il existe une famille dénombrable d'applications lipschitziennes $f_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $H^d(E \setminus \cup_j f_j(\mathbb{R}^d)) = 0$. Une courbe rectifiable Γ de $\mathbb{R}^n$ est 1-rectifiable. D'un autre côté, un ensemble E est dit purement non d -rectifiable si et seulement si $H^d(E \cap F) = 0$ pour tout ensemble d -rectifiable F de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas particulier où $d = 1$, cette condition est équivalente à $H^1(E \cap \Gamma) = 0$ pour toute courbe rectifiable Γ de $\mathbb{R}^n$. Donc, le fait 4 dit que si $H^1(E) < +\infty$, alors E est effaçable si et seulement si E est purement non 1-rectifiable. Un exemple d'un tel ensemble est l'ensemble de Cantor 4-coins que nous allons maintenant construire. Soit $E_0 = [0, 1]^2$ le carré unité dans $\mathbb{C}$. Découpons E_0 en 16 carrés égaux de longueur de côté $\frac{1}{4}$. L'ensemble E_1 est l'union des 4 carrés situés dans les coins de E_0 . Puis, on découpe chacun des 4 carrés en 16 carrés identiques et l'ensemble E_2 est l'union des 16 carrés qui sont situés dans les coins des 4 carrés de E_1 . En itérant cette construction, nous pouvons exhiber une suite de sous-ensembles $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$, chacun des E_j étant formé de 4^j carrés de longueur de côté 4^{-j} qui sont situés dans les coins des carrés de E_{j-1} . Soit $\mathcal{C} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j$. Alors, $\text{Hdiam}(\mathcal{C}) = 1$ et $H^1(\mathcal{C}) = \sqrt{2}$. Le fait que $\mathcal{C}$ est purement non rectifiable découle de la remarque suivante. Si Γ est une courbe lipschitzienne du plan complexe, sa projection dans toute direction sauf peut-être une (penser au cas où Γ est une droite) est de mesure de Lebesgue (dans $\mathbb{R}$) non nulle. Il en est de même de tout sous-ensemble de Γ de mesure strictement positive. Donc, s'il existait une courbe lipschitzienne Γ telle que $H^1(\mathcal{C} \cap \Gamma) > 0$ alors $\mathcal{C}$ ne pourrait pas avoir des projections de mesure de Lebesgue nulle dans deux directions distinctes. Ce qui est pourtant le cas ! Donc, $\mathcal{C}$ est purement non rectifiable. L'ensemble de Cantor 4-coins est un exemple d'ensemble de 1-mesure de Hausdorff non nulle mais qui est effaçable (voir [16]).

Tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $H^d(E) < +\infty$ se décompose en une bonne et une mauvaise partie :

$$E = E_{\text{rect}} \cup E_{\text{nonrect}}$$

où E_{rect} (respectivement E_{nonrect}) est d -rectifiable (respectivement purement non d -rectifiable). Il est important de noter qu'il existe diverses caractérisations des ensembles rectifiables/purement non rectifiables (en termes de densité, d'existence de tangentes, de taille des projections, voir [27]) dans le cas des ensembles de mesure de Hausdorff finie. Cependant, les propriétés de rectifiabilité pour des ensembles qui ne sont pas de mesure de Hausdorff σ -finie sont très mal connues. Donnons maintenant un critère de non rectifiabilité pour les sous-ensembles du plan complexe. Commençons par une définition. Soit $E \subset \mathbb{C}$. Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, notons $\Pi_\theta(E)$ la projection orthogonale de E sur la direction θ et $|\Pi_\theta(E)|$ la mesure de Lebesgue (dans $\mathbb{R}$) de cette projection. Nous définissons la longueur de Favard de E par

$$\text{Fav}(E) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\Pi_\theta(E)| d\theta.$$