

ÉTATS QUASI-LIBRES LIBRES ET FACTEURS DE TYPE III
[d'après D. Shlyakhtenko]

par **Stefaan VAES**

Le but de cet exposé est de présenter une famille d'algèbres de von Neumann introduite par Shlyakhtenko et de donner un aperçu des résultats de classification des algèbres de cette famille. Ces algèbres de von Neumann sont construites dans le cadre des probabilités libres de Voiculescu.

Murray et von Neumann ont initié la classification des algèbres de von Neumann. Ils ont démontré que chaque algèbre de von Neumann s'écrit comme intégrale directe de facteurs (algèbres de von Neumann de centre trivial) et ils ont classifié les facteurs en différents types : I, II et III. Dans sa thèse [5], Connes a raffiné cette classification en introduisant les sous-types III_λ ($0 \leq \lambda \leq 1$). La construction de Shlyakhtenko donne tout un monde d'exemples de facteurs de type III_1 , c'est-à-dire le plus haut dans la « hiérarchie » des facteurs.

L'idée de Shlyakhtenko est de donner dans le cadre des probabilités libres de Voiculescu une version du foncteur CAR (relations d'anticommutation canoniques) et des états quasi-libres associés. Le foncteur CAR associe à chaque espace de Hilbert H la C^* -algèbre unifère universelle $\text{CAR}(H)$ engendrée par la famille $\{a(\xi) \mid \xi \in H\}$ telle que

- (1) $\xi \mapsto a(\xi)$ est linéaire,
- (2) les relations d'anticommutation canoniques sont vérifiées

$$\begin{aligned}a(\eta)a(\xi)^* + a(\xi)^*a(\eta) &= \langle \eta, \xi \rangle 1, \\ a(\xi)a(\eta) + a(\eta)a(\xi) &= 0.\end{aligned}$$

Les relations d'anticommutation canoniques peuvent être réalisées par les opérateurs de création sur *l'espace de Fock antisymétrique*. Tout opérateur S agissant sur H tel que $0 \leq S \leq 1$ donne lieu à un état ω_S de la C^* -algèbre $\text{CAR}(H)$, qu'on appelle *état quasi-libre de covariance S* . Les représentations GNS [8] associées aux états quasi-libres ont été beaucoup étudiées [18, 14, 1]. Dans une telle représentation, le bicommutant $\text{CAR}(H)''$ est une algèbre de von Neumann. Chaque état quasi-libre sur $\text{CAR}(H)$ donne donc une algèbre de von Neumann qui s'avère être un facteur.

Les travaux d'Araki & Woods [2] et de Powers & Størmer [14] permettent de déterminer le type de ces *facteurs d'Araki-Woods*⁽¹⁾. Plus précisément, si $0 < \lambda \leq 1$, il existe exactement une classe d'isomorphisme de facteurs d'Araki-Woods de type III_λ et il existe une famille non-dénombrable de facteurs d'Araki-Woods de type III_0 et mutuellement non-isomorphes.

Remarquons que les facteurs d'Araki-Woods sont des *facteurs moyennables*. Dans [7] Connes a réussi à donner une classification complète des facteurs moyennables. C'est un des résultats les plus profonds de la théorie des algèbres de von Neumann. Pour chacun des types II_1 , II_∞ , III_λ ($0 < \lambda \leq 1$) il existe un unique facteur moyennable. Les facteurs moyennables de type III_0 sont classifiés par un invariant en théorie ergodique qu'on appelle *flot des poids*. L'unicité du facteur moyennable de type III_1 est dû à Haagerup [10]. Dans le cadre des probabilités libres, nous allons obtenir des facteurs non-moyennables. En particulier Shlyakhtenko construit une famille non-dénombrable de facteurs de type III_1 , non-moyennables et mutuellement non-isomorphes.

L'analogue en probabilités libres du foncteur CAR associe à un espace de Hilbert réel $H_\mathbb{R}$, la C^* -algèbre universelle $\Gamma(H_\mathbb{R})$ engendrée par la famille $\{s(\xi) \mid \xi \in H_\mathbb{R}\}$ telle que

- $s(\xi)$ soit auto-adjoint pour tout $\xi \in H_\mathbb{R}$,
- $\xi \mapsto s(\xi)$ soit $\mathbb{R}$ -linéaire,
- $\|s(\xi)\| \leq \|\xi\|$ pour tout $\xi \in H_\mathbb{R}$.

Pour chaque plongement isométrique $H_\mathbb{R} \hookrightarrow H$ de $H_\mathbb{R}$ dans un espace de Hilbert H , on obtient une représentation de $\Gamma(H_\mathbb{R})$ sur *l'espace de Fock plein*

$$\mathcal{F}(H) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} H^{\otimes n},$$

en posant $s(\xi) = (\ell(\xi) + \ell(\xi)^*)/2$ où $\ell(\xi)$ est l'opérateur de création.

La construction des facteurs d'Araki-Woods libres suppose la donnée d'un groupe à un paramètre (U_t) de transformations orthogonales d'un espace de Hilbert réel $H_\mathbb{R}$ qui induit un plongement isométrique $H_\mathbb{R} \hookrightarrow H$ de $H_\mathbb{R}$ dans le complexifié H . On obtient une représentation de $\Gamma(H_\mathbb{R})$ dont l'image est notée $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)$. Le facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)$. La restriction de l'état du vide au facteur $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est *l'état quasi-libre libre* noté φ_U . Alors, $\Gamma(H_\mathbb{R}, U_t)''$ est un facteur de type III, sauf si $U_t = \text{id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Nous commençons cet exposé par rappeler la classification des facteurs de Connes et les probabilités libres de Voiculescu et par une présentation de plusieurs points de vue sur nos données essentielles, les représentations orthogonales de $\mathbb{R}$. Au §2 nous

⁽¹⁾Il découle des travaux de Powers & Størmer que les facteurs associés aux états quasi-libres sont des produits tensoriels infinis de matrices 2 fois 2 (des facteurs ITPFI_2). Plus généralement, Araki & Woods étudient et déterminent le type des produits tensoriels infinis de facteurs de type I (les ITPFI) et il y a des ITPFI qui ne sont pas ITPFI_2 .

définissons l'algèbre de von Neumann $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ avec l'état quasi-libre libre φ_U . Nous étudions en détail le cas $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ muni de la représentation de $\mathbb{R}$ par rotations. Au § 3 nous présentons les principaux résultats de classification et de non-isomorphisme des facteurs d'Araki-Woods libres obtenus par Shlyakhtenko :

- Classification complète des facteurs d'Araki-Woods libres associés à une représentation (U_t) *presque-périodique*.
- Construction d'une famille non-dénombrable de facteurs d'Araki-Woods libres non-presque-périodiques et mutuellement non-isomorphes. Ces facteurs sont distingués par leur invariant τ de Connes.
- Construction de deux facteurs d'Araki-Woods libres non-isomorphes et ayant le même invariant τ de Connes. Ceci est une application de la notion de *dimension entropique libre* introduite par Voiculescu [29, 28].
- Démonstration que la classe d'isomorphisme d'un facteur Araki-Woods libre peut dépendre de la multiplicité de la représentation (U_t) . Ce résultat est démontré à l'aide de la notion d'*algèbre de von Neumann solide* due à Ozawa [12].

La classification complète des facteurs d'Araki-Woods libres reste un problème ouvert. Les résultats de non-isomorphisme présentés au § 3 montrent qu'un facteur d'Araki-Woods libre $\Gamma(H_{\mathbb{R}}, U_t)''$ dépend fortement de la classe de la mesure spectrale de la représentation (U_t) . Ce problème de classification est beaucoup plus difficile que la classification des facteurs d'Araki-Woods, pour la raison suivante. Powers et Størmer [14] démontrent essentiellement que deux facteurs d'Araki-Woods associés à des états quasi-libres sont isomorphes si leurs opérateurs de covariance diffèrent d'un opérateur d'Hilbert-Schmidt. En particulier, d'après un résultat de von Neumann, il suffit de considérer le cas d'un opérateur de covariance diagonalisable. Ceci n'est plus le cas pour les facteurs d'Araki-Woods libres. Une grande partie des facteurs d'Araki-Woods libres ne peut être obtenue par des représentations orthogonales presque-périodiques.

Dans le dernier § 4 nous présentons un nouveau résultat sur les produits libres, ce qui permet au § 2.3 de démontrer un résultat un peu plus général que dans l'article [22].

Il y a un certain nombre de résultats et d'applications dans la théorie des facteurs d'Araki-Woods libres dont on ne parlera pas en détail dans cet exposé. Notons que Shlyakhtenko a démontré dans [23] que les facteurs d'Araki-Woods libres T_{λ} de type III_{λ} ($0 < \lambda < 1$) sont des *facteurs premiers* : ils ne peuvent être écrits comme produit tensoriel de deux facteurs diffus (sans projecteurs minimaux). Dans [13] Pisier et Shlyakhtenko utilisent des facteurs d'Araki-Woods libres comme modèles pour démontrer une *inégalité de Grothendieck* pour les espaces d'opérateurs. Dans [27] les facteurs d'Araki-Woods libres sont utilisés pour construire des *actions extérieures* de groupes quantiques localement compacts.

Je remercie S. Baaj, E. Germain, D. Shlyakhtenko et G. Skandalis pour leur aide pendant la préparation de cet exposé.

1. RAPPELS

1.1. Algèbres de von Neumann. Type des facteurs

On rappelle que pour un ensemble X d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H , $X \subset B(H)$, on appelle *commutant* de X et on note X' l'ensemble de tous les opérateurs $T \in B(H)$ qui commutent à X . Si $A \subset B(H)$ est une sous-algèbre involutive qui agit d'une façon non-dégénérée sur H , le *bicommutant* A'' coïncide avec l'adhérence de A dans $B(H)$ pour la topologie faible, c'est-à-dire la topologie donnée par les semi-normes $T \mapsto |\langle T\xi, \eta \rangle|$, où $\xi, \eta \in H$.

On appelle *algèbre de von Neumann* toute sous-algèbre involutive $M \subset B(H)$ qui est égale à son bicommutant : $M = M''$, ce qui équivaut à dire que M est faiblement fermé et $1 \in M$. Un *facteur* est une algèbre de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires. Si G est un groupe localement compact, l'algèbre de von Neumann du groupe G notée $L(G)$ est le bicommutant $\{\lambda_g \mid g \in G\}''$ où (λ_g) est la représentation régulière du groupe G sur l'espace de Hilbert $L^2(G)$.

Murray et von Neumann ont classifié les facteurs en types I, II et III. Les *facteurs de type I* sont ceux qui possèdent des projecteurs minimaux. Ils sont isomorphes à $M_n(\mathbb{C})$ (type I_n) ou $B(\ell^2)$ (type I_∞). Les *facteurs de type II_1* sont ceux qui admettent une trace finie et qui sont de dimension infinie (pour exclure le cas I_n). L'exemple type d'un facteur II_1 est donné par l'algèbre de von Neumann $L(G)$ d'un groupe discret G dont $\{e\}$ est la seule classe de conjugaison finie (on dit que G est CCI). Les groupes libres $\mathbb{F}_n$ à n générateurs sont des exemples de groupes CCI (n peut être ∞). Les *facteurs de type II_∞* sont ceux qui sont de la forme $N \otimes B(\ell^2)$ avec N un facteur II_1 . Ce sont exactement les facteurs qui admettent une trace infinie semi-finie et qui ne sont pas de type I. Un facteur de type I ou II est dit *semi-fini*. Il admet toujours une trace semi-finie. Finalement les *facteurs de type III* sont ceux qui n'admettent pas de trace non-nulle.

Remarque 1.1. — Dans tout l'exposé les espaces de Hilbert sont supposés *séparables* et les algèbres de von Neumann à *prédual séparable*, i.e. admettant une représentation fidèle sur un espace de Hilbert séparable.

1.2. Classification des facteurs de type III d'après Connes

Un *état normal* d'une algèbre de von Neumann M est une forme linéaire faiblement continue $\omega : M \rightarrow \mathbb{C}$ positive ($\omega(x) \geq 0$ quand $x \geq 0$) qui satisfait $\omega(1) = 1$. Un état est dit *fidèle* si $x = 0$ dès que $\omega(x) = 0$ et $x \geq 0$. Toute algèbre de von Neumann à prédual séparable admet un état fidèle.

La théorie de Tomita-Takesaki associe à tout état fidèle ω un groupe à un paramètre (σ_t^ω) d'automorphismes de M appelé *groupe modulaire* et caractérisé par

$$- \omega \sigma_t^\omega = \omega \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

– ω satisfait la condition KMS par rapport à (σ_t^ω) : pour tout $x, y \in M$, il existe une fonction continue $f : \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est analytique à l'intérieur de la bande et qui satisfait

$$f(t) = \omega(x\sigma_t^\omega(y)) \quad \text{et} \quad f(t+i) = \omega(\sigma_t^\omega(y)x) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Une bonne introduction à la *théorie modulaire de Tomita-Takesaki* se trouve dans [26].

Le *théorème de Radon-Nikodym* de Connes [5] permet de comparer les groupes modulaires de deux états fidèles ω, μ sur M . En effet, il existe une application faiblement continue $t \mapsto u_t$ de $\mathbb{R}$ dans le groupe unitaire de M telle que

$$\begin{aligned} - u_{t+s} &= u_t \sigma_t^\omega(u_s), \\ - \sigma_t^\mu(x) &= u_t \sigma_t^\omega(x) u_t^*. \end{aligned}$$

Les groupes modulaires de deux états fidèles diffèrent donc par une perturbation intérieure. Il s'en suit qu'une algèbre de von Neumann a une dynamique intrinsèque donnée par les groupes modulaires des états fidèles et déterminée à perturbation intérieure près.

Définissons le groupe polonais $\operatorname{Aut} M$ des automorphismes de M muni de la topologie induite par les distances $d(\alpha, \beta) = \|\omega\alpha - \omega\beta\|$ et $d(\alpha, \beta) = \|\omega\alpha^{-1} - \omega\beta^{-1}\|$, où ω parcourt les états de M . À chaque unitaire $u \in M$, on associe l'*automorphisme intérieur* $\operatorname{Ad} u$ défini par $(\operatorname{Ad} u)(x) = uxu^*$. Les automorphismes intérieurs forment un sous-groupe distingué $\operatorname{Int} M$ de $\operatorname{Aut} M$. Le groupe quotient est noté $\operatorname{Out} M$. Le théorème de Radon-Nikodym permet de définir un homomorphisme $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{Out} M$ qui envoie t à la classe de σ_t^ω et qui ne dépend pas du choix de ω .

Invariant T . — Soit ω un état fidèle sur un facteur M avec groupe modulaire (σ_t) . Dans [5] Connes a introduit le sous-groupe $T(M)$ de $\mathbb{R}$:

$$T(M) = \{t \in \mathbb{R} \mid \sigma_t^\omega \in \operatorname{Int} M\}.$$

D'après le théorème de Radon-Nikodym, l'invariant $T(M)$ ne dépend pas du choix de l'état ω . C'est donc un invariant de l'algèbre de von Neumann M .

Flot des poids. — À chaque facteur M est associée une algèbre de von Neumann semi-finie : c'est le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ de M par le groupe modulaire (σ_t) d'un état fidèle sur M . Sur le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$, il existe une trace semi-finie canonique. Le produit croisé $M \rtimes_{(\sigma_t)} \mathbb{R}$ admet une *action duale* (θ_s) de $\mathbb{R}_+^*$ par automorphismes. La restriction de l'action (θ_s) au centre du produit croisé s'appelle le *flot des poids* de M . Grâce au théorème de Radon-Nikodym, le flot des poids ne dépend pas du choix de l'état fidèle.