Séminaire BOURBAKI Novembre 2003
56^{e} année, 2003-2004, n^{o} 927, p. 59 à 93

DÉVIATIONS DE MOYENNES ERGODIQUES, FLOTS DE TEICHMÜLLER ET COCYCLE DE KONTSEVICH-ZORICH
[d'après Forni, Kontsevich, Zorich...]

par **Raphaël KRIKORIAN**

1. INTRODUCTION

Considérons un espace topologique X sur lequel agit un flot ϕ et supposons que μ soit une mesure de probabilité invariante ergodique pour le flot ϕ (c'est-à-dire que les seuls ensembles μ mesurables ϕ-invariants sont de mesure 0 ou 1). On sait d'après le théorème de Birkhoff que pour toute observable μ-intégrable $f : X \to \mathbb{R}$ on a pour μ-presque tout $x \in X$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\phi^s(x))ds = \int_X f d\mu.$$

En particulier si f est d'intégrale nulle, les moyennes ergodiques précédentes convergent vers 0 et il est naturel d'étudier dans ce cas le comportement asymptotique des intégrales ergodiques $\int_0^t f(\phi^s(x))ds$. Lorsque l'on suppose que le système dynamique est hyperbolique, comme c'est le cas par exemple du flot géodésique sur des surfaces compactes de courbure négative, le comportement des intégrales ergodiques est décrit par le théorème central limite (comme dans le cas de variables aléatoires indépendantes de même loi). Pour des flots non hyperboliques, les situations dans lesquelles on peut espérer énoncer des résultats intéressants sont peu nombreux mais existent. Ainsi, pour mentionner l'exemple le plus simple, le comportement des intégrales ergodiques des flots (linéaires car le cas général s'y ramène) sur des tores est bien compris. Soit ϕ le flot du champ de vecteurs $X = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}$ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; supposons que

– (hypothèse sur l'arithmétique) (α, β) vérifie une condition diophantienne de la forme

$$|k\alpha + l\beta| \geqslant \frac{K^{-1}}{(|k| + |l|)^{\tau}}, \qquad \forall\, (k,l) \in \mathbb{Z}^2 - \{0,0\}$$

condition qui, dès que $\tau > 1$, est de mesure de Lebesgue positive pour $K > 0$ assez grand et de mesure totale si l'on prend l'union sur tous les K positifs ;

– (hypothèse sur la régularité de f) f soit suffisamment dérivable (par exemple $C^{\tau+2}$).

Dans ce cas il est facile de voir, en utilisant l'analyse de Fourier (bien définie sur le tore!) et la condition diophantienne, que les intégrales ergodiques sont bornées pour toute f régulière et tout $x \in \mathbb{T}^2$. Dans le cas où (α, β) n'est pas diophantien mais seulement irrationnel et f est à variations bornées, les intégrales ergodiques ne sont plus bornées mais admettent une borne de type logarithmique (en fonction de t). Il faut alors utiliser le développement en fractions continues de (α/β) (que l'on suppose irrationnel) et la propriété de Denjoy-Koksma.

Le cas qui nous intéresse ici est celui des flots des champs de vecteurs sur des surfaces de genre plus grand que 2 qui préservent une forme volume et dont les singularités sont de type selle. La dynamique dans ce cas n'est ni hyperbolique (comme c'est le cas du flot géodésique où deux points proches ont tendance à se séparer de façon exponentielle sous l'effet du flot), ni elliptique (comme dans le cas des flots sur le tore où deux points proches le restent sous l'effet de la dynamique) mais plutôt de type parabolique (comme dans le cas du flot horocyclique où deux points proches se séparent à vitesse au plus polynomiale). Ce type de flot intervient naturellement dans l'étude d'au moins deux problèmes importants de dynamique : les billards rationnels et les échanges d'intervalles.

Considérons un billard plan polygonal P dont les angles sont des multiples rationnels de 2π ; on peut réduire la dynamique des points $(x, v) \in P \times \mathbb{R}^2$, v étant de direction fixée, à celle d'un flot sur une surface de genre g obtenue en recollant des copies de la table (qui sont les images du polygone par le groupe engendré par les symétries par rapport à ses côtés). On peut ainsi voir que, pour presque toute direction v, le flot (dans l'espace des configurations) est uniquement ergodique (*cf.* [8] utilisant des résultats antérieurs de Masur [12], Veech [15]) et ceci permet de démontrer qu'il existe un G_δ-dense de billards (non rationnels) uniquement ergodiques (dans l'espace des phases). Je renvoie au séminaire Bourbaki de P. Arnoux [1] pour un exposé très clair de ces travaux.

Un échange d'intervalles sur n intervalles $(I_1, \ldots, I_n)$ qui forment une partition de $[0, 1]$ est déterminé par une paire (l, π) où $l = (|I_1|, \ldots, |I_n|)$ (longueurs des intervalles) et π est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On suppose que la permutation est irréductible c'est-à-dire qu'il n'existe pas $k < n$ pour lequel $\pi\{1, \ldots, k\} = \{1, \ldots, k\}$. Notons S_n^0 l'ensemble des permutations irréductibles. L'ensemble des échanges d'intervalles irréductibles est donc paramétré par $\Delta^{n-1} \times S_n^0$ où Δ^{n-1} est le simplexe standard de dimension $n - 1$. Une rotation est un cas particulier d'échange d'intervalles où $n = 2$. On peut définir pour les échanges d'intervalles des procédures de *renormalisation* G (*cf.* Rauzy, Veech, Zorich, Marmi-Moussa-Yoccoz...) qui sont des analogues de l'algorithme de Gauss pour les rotations et qui permettent une analyse fine des propriétés ergodiques des échanges d'intervalles. Nous renvoyons le lecteur à [11] pour de plus amples renseignements. L'ensemble des échanges d'intervalles (irréductibles) $\Delta^{n-1} \times S_n^0$ se décompose sous l'action de G en sous-ensembles invariants de la forme $\Delta^{n-1} \times R$ et on appelle les ensembles R ainsi obtenus les classes de Rauzy. Zorich [18] montre qu'une de ces applications de Gauss, l'algorithme de Zorich (qui est une version accélérée de l'algorithme de Rauzy), est ergodique par rapport à une mesure de probabilité μ_R absolument continue sur chaque classe de Rauzy. C'est l'analogue d'un théorème de Veech et Masur ([15], [12]) sur l'ergodicité du flot de Teichmüller sur les composantes connexes de l'espace des modules (*cf.* section 4). Ces liens entre flots et échanges d'intervalles sont en fait naturels : on peut voir un échange d'intervalles comme la dynamique induite par l'application de retour d'un flot sur un intervalle (transverse au flot) d'une surface de genre g. Considérons un échange d'intervalles T sur n intervalles $I_1, \dots, I_n$ et notons,

$$S_i(x,N) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi_i(T^k(x)),$$

la N-ième somme ergodique de la fonction caractéristique χ_i de l'intervalle I_i sous l'action de T (on compte le nombre de retours dans I_i entre les temps 0 et N). Formons le vecteur $S(x,N) = (S_1(x,N), \dots, S_n(x,N)) \in \mathbb{R}^n$. Si l'échange d'intervalles est uniquement ergodique (ce qui est une condition de mesure pleine) alors pour tout x

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S(x,N)}{N} = l,$$

Zorich démontre le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1 (Zorich [19]). — *Soit R une classe de Rauzy. Il existe $\theta_1 > \theta_2 \geqslant 0$ tels que pour presque tout échange d'intervalle et presque tout x*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\log |S(x,N) - Nl|}{\log N} = \frac{\theta_2}{\theta_1} < 1.$$

Les réels θ_1, θ_2 sont en fait les deux plus grands exposants de Lyapunov d'un cocycle de matrices défini au-dessus de $\Delta^{n-1} \times R$ (*cf.* section 5.1) introduit par Zorich.

Revenons aux champs de vecteurs sur les surfaces de genre $g \geqslant 2$. Soient M une surface orientable compacte de genre $g \geqslant 2$ et ω une forme volume sur M. Considérons un champ de vecteurs X (on note $\phi_X(\cdot, t)$ son flot) dont les singularités sont de type selle (Σ, ι) où $\Sigma = \{p_1, \dots, p_\sigma\}$ est l'ensemble des singularités du champ X et ι_k, $1 \leqslant k \leqslant \sigma$ est l'indice de X au point p_k. La notion de distribution sur M (au sens de Schwartz et De Rham) a bien un sens ; par ailleurs on peut définir de façon habituelle l'espace de Sobolev $H^1(M)$ et son dual $H^{-1}(M)$. Une distribution $\mathcal{D}$ est dite X-invariante si $X\mathcal{D} = 0$ et d'ordre 1 si elle est dans $H^{-1}(M)$. Nous noterons $\mathcal{I}^1_X(M)$ l'ensemble des distributions X-invariantes et d'ordre 1.

Le résultat que démontre Giovanni Forni est le suivant :

Théorème 1.2 (Forni [5]). — *Pour « presque tout » champ de vecteurs X qui préserve ω et dont les singularités sont de type selle il existe des nombres réels strictement positifs $\lambda'_1(X) > \cdots > \lambda'_s(X)$ et des espaces de distributions $\mathcal{I}^1_X(\lambda'_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, X-invariantes et d'ordre 1 tels que*

(1) *on ait la décomposition*

$$\mathcal{I}^1_X = \mathcal{I}^1_X(\lambda'_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}^1_X(\lambda'_s),$$

(2) *si $i < s$ et si une observable f à support dans $M - \Sigma$ et dans l'espace de Sobolev $H^1_0(M - \Sigma)$ vérifie*

$$\forall \mathcal{D} \in \mathcal{I}^1_X(\lambda'_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}^1_X(\lambda'_i), \quad \mathcal{D}(f) = 0$$

alors pour presque tout point $p \in M$

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{\log |\int_0^T f(\phi_X(p,\tau))d\tau|}{\log T} \leqslant \lambda'_{i+1};$$

en outre il existe une distribution $\mathcal{D}_{i+1} \in \mathcal{I}_X(\lambda'_{i+1})$ telle que si $\mathcal{D}_{i+1}(f) \neq 0$ alors l'inégalité précédente est une égalité ;

(3) *si $i = s$ et sous les mêmes hypothèses sur f qu'en* (2),

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{\log |\int_0^T f(\phi_X(p,\tau))d\tau|}{\log T} = 0.$$

Le « presque tout » signifie la chose suivante : à tout champ de vecteurs X préservant la forme volume ω on associe la classe de cohomologie $[i_X\omega] \in H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ (*cf.* section 6.1). Un ensemble de champs de vecteurs préservant ω est négligeable si son image par l'application précédente est de mesure de Lebesgue nulle dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$.

La preuve de ce résultat repose sur l'analyse de deux types de dynamiques différents. Il y a, d'une part, la dynamique du champ de vecteurs X sur la surface M que l'on peut ramener à celle du feuilletage horizontal d'une différentielle quadratique q. D'autre part, il existe des dynamiques de « renormalisation » qui ont pour but d'accélérer la dynamique sur M. Les espaces dans lesquels travaillent ces dynamiques sont des espaces de modules (*cf.* section 2) et pour les comprendre il est important de savoir démontrer que les exposants de Lyapunov de certains cocycles, le cocycle de Kontsevich-Zorich (*cf.* section 3.2) et le cocycle de Forni (*cf.* section 6.3 et section 8) ont des exposants de Lyapunov non nuls (*cf.* section 5 et section 7). Pour cela Forni utilise des outils d'Analyse qu'il a développés dans [4] et que l'on peut voir comme une extension de la théorie de Hodge (section 4).

Remarque. — Il existe des liens importants entre le problème des déviations des moyennes ergodiques pour des flots sur des surfaces de genre supérieur à 2 ou des échanges d'intervalles, et celui de la résolution des équations cohomologiques. Dans le cas des flots, par exemple, il s'agit de résoudre l'équation $\mathcal{L}_X f = g$ où g est une fonction (ou une distribution) donnée ($\mathcal{L}_X$ est la dérivation de Lie). Ces équations n'ont pas toujours de solution, mais on connaît dans certains cas les obstructions. Nous ne parlerons pas de ce sujet dans la suite mais nous renvoyons à l'article fondateur de Forni [4] et mentionnons les résultats nouveaux de Marmi-Moussa-Yoccoz [11] dans le cadre des échanges d'intervalles.

Remerciements. — Je tiens à remercier Giovanni Forni, qui a répondu très patiemment à mes nombreuses questions, pour son aide, Jean-Paul Thouvenot, Stefano Marmi et Jean-Christophe Yoccoz pour leurs commentaires éclairés.

2. LES ESPACES DE MODULES

2.1. L'espace de Teichmüller

L'espace de Teichmüller T_g d'une surface M de genre $g \geqslant 2$ est l'ensemble des structures complexes de M à isotopies près, c'est-à-dire l'ensemble obtenu en décrétant que deux structures complexes sont équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par un élément de $\mathrm{Diff}_0(M)$, l'ensemble des difféomorphismes de M isotopes à l'identité. C'est aussi l'ensemble des métriques de courbure -1 à isotopies près. On peut munir T_g d'une distance : si $[C_1]$ et $[C_2]$ sont deux classes de structures conformes, $d([C_1],[C_2])$ est l'infimum sur les $h \in \mathrm{Diff}_0(M)$ des $(1/2)\ln K(h)$, $K(h)$ étant la constante de quasi-conformalité de h (relativement à C_1, C_2). Muni de cette distance, T_g est homéomorphe à la boule ouverte d'un espace euclidien réel de dimension $6g-6$. On peut également munir T_g d'une structure complexe qui en fait un domaine borné d'holomorphie de $\mathbb{C}^{3g-3}$.

2.2. Différentielles quadratiques

Une structure complexe étant choisie sur M, une différentielle quadratique holomorphe q sur M est la donnée, pour chaque carte d'un atlas conforme $(U_i,\zeta_i)_i$, d'une expression $q_i(\zeta_i)d\zeta_i^2$ (q_i holomorphe sur U_i) où l'élément différentiel signifie que sur l'ouvert $U_i \cap U_j$ on a la relation de compatibilité

$$q_j(\zeta_j)\Big(\frac{d\zeta_j}{d\zeta_i}\Big)^2 = q_i(\zeta_i).$$

Le quotient de deux différentielles quadratiques est une fonction méromorphe (qui a donc autant de zéros que de pôles) et par conséquent toutes les différentielles quadratiques ont le même nombre de zéros qui est le double du nombre de zéros d'une 1-forme holomorphe : une différentielle quadratique a donc $4g-4$ zéros (comptés avec multiplicité). L'espace des différentielles quadratiques sur M est un espace vectoriel de dimension (complexe) finie égale à $3g-3$ (Riemann-Roch) si $g \geqslant 2$ et de dimension 1 sur le tore. Chaque différentielle quadratique définit une structure plate sur M avec des singularités (Gauss-Bonnet) aux zéros de q : en un point $x \in M$ où $q(x) \neq 0$