Séminaire BOURBAKI Juin 2006
58e année, 2005-2006, n^o 963, p. 321 à 340

SUR LES REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FINIE DE LA SUPER ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{gl}(m,n)$ [d'après Serganova]

par **Caroline GRUSON**

INTRODUCTION

Les représentations de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie sont sommes directes de leurs composantes irréductibles. Si on fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ dans une algèbre de Lie simple et une représentation de dimension finie V de cette algèbre de Lie, les éléments de $\mathfrak{h}$ agissent de manière simultanément diagonalisable dans V et les valeurs propres s'organisent en des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$. Connaître ces formes linéaires, c'est-à-dire les *poids* de la représentation V, et leurs multiplicités revient à connaître V si V est irréductible sur l'algèbre de Lie initiale : c'est ce qu'on appelle le caractère de V et Hermann Weyl en a donné une formule générale, qui est une somme alternée indexée par le groupe de Weyl de la situation.

Les algèbres de Lie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées (ou super algèbres de Lie) simples ont été classifiées par Victor Kac en 1977, [9]. Dans [8], Kac étudie la théorie des représentations de ces algèbres et, dans le cas de $\mathfrak{gl}(m,n)$, il introduit les modules de Kac, qui sont de dimension finie et possèdent une formule des caractères analogue à la formule de Weyl. Malheureusement (?), la catégorie $\mathcal{F}$ des représentations de $\mathfrak{gl}(m,n)$ de dimension finie sur lesquelles une sous-algèbre de Cartan de la partie paire $\mathfrak{gl}(m) \times \mathfrak{gl}(n)$ agit de manière diagonalisable n'est pas semi-simple : certaines représentations irréductibles, dites atypiques, ne sont pas scindées dans les représentations où elles apparaissent comme sous-quotients. Les autres représentations irréductibles, dites typiques, sont en fait des modules de Kac et on dispose donc d'une formule des caractères pour eux.

Le problème de trouver le caractère des représentations atypiques de $\mathfrak{gl}(m,n)$, resté ouvert depuis 1977, étudié par Bernstein et Leites dans [2], a été résolu par Vera Serganova en 1996 ([12]). Chaque représentation irréductible atypique L est quotient propre d'un module de Kac V, et si on regarde une suite de Jordan-Hölder de ce module de Kac, on voit apparaître des représentations irréductibles atypiques, qui sont dans la même composante connexe (ou dans le même bloc) de $\mathcal{F}$ que L et V. Le premier théorème (théorème 2.2) explicite ces représentations irréductibles, qui sont en nombre fini. Le second théorème (théorème 2.3) exprime le caractère d'une représentation irréductible atypique comme une somme infinie, il est donc d'un maniement plus compliqué. Ce sont ces résultats qui sont exposés ici.

La difficulté principale du cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué provient du fait que le centre de l'algèbre enveloppante $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}(m,n))$ a une structure beaucoup plus compliquée que dans le cas classique. Sergeev, dans [15], donne une description de ce centre dans le cas de $\mathfrak{gl}(m,n)$. Il s'agit des polynômes super symétriques. D'autre part, $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}(m,n))$ intervient dans des questions de géométrie algébrique étudiées par Fulton et Pragacz dans [6]. On remarquera que les difficultés soulevées ressemblent beaucoup aux ennuis que l'on a quand on étudie les représentations des algèbres de Lie simples en caractéristique p (voir [7]). Plusieurs constructions établies par Serganova se font de manière analogue en caractéristique p, même si les conclusions sont assez différentes.

Notons que Jonathan Brundan fait un lien dans [4] entre certaines catégories de représentations du groupe quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ et certaines catégories de $\mathfrak{gl}(m,n)$-modules. Ses résultats répondent aux mêmes questions que ceux de Serganova, avec une approche très différente, mais ne simplifient pas, hélas, les difficultés calculatoires qu'on rencontre.

Le plan de ce texte est le suivant : dans les deux premières parties, je donne les définitions, les notations et les résultats nécessaires pour énoncer les deux principaux théorèmes de [12], et je traite des exemples. Les parties 3 et 4 contiennent des éléments de la démonstration de Vera Serganova, l'induction géométrique pour le paragraphe 3 et un principe de récurrence pour 4 ; elles sont basées sur les articles [14] et [12]. Pour terminer, au paragraphe 5, j'essaie de dépeindre l'état actuel du sujet, en particulier les résultats de [13] et [4].

À partir du paragraphe 3, je suppose que le lecteur a une certaine familiarité avec la théorie des représentations.

J'ai choisi de ne citer en bibliographie que les textes qui m'ont servi directement. L'article de Brundan ([4]) contient une bibliographie très bien faite sur le sujet.

Je suis très reconnaissante envers tous ceux avec lesquels j'ai discuté de ce texte, tout particulièrement Corinne Blondel, Michel Duflo, Laurent Gruson, Séverine Leidwanger, Jean-François Robinet et Jerzy Weyman.

Je remercie très chaleureusement Vera Serganova pour ses réponses claires et rapides à mes questions, pour sa relecture attentive de la présente rédaction et pour sa disponibilité et sa gentillesse pendant la préparation de cet exposé.

1. LE CONTEXTE : DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soient m et n deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On définit la super algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,n)$; elle est constituée des matrices $(m+n)\times(m+n)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, munies de la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation suivante :

$$\mathfrak{g}_0 = \{\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right), A \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C}), D \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{smallmatrix}\right), B \in Hom(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m), C \in Hom(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)\},$$

et du crochet de Lie défini sur les éléments homogènes u dans $\mathfrak{g}_{p(u)}$ et v dans $\mathfrak{g}_{p(v)}$ par :

$$[u,v] := uv - (-1)^{p(u)p(v)}vu$$

et prolongé par bilinéarité.

Ce crochet vérifie les axiomes des crochets de super algèbres de Lie (super antisymétrie et identité de Jacobi graduée : pour tous u, v, w homogènes dans $\mathfrak{g}$, on a $[u,[v,w]] + (-1)^{p(u)(p(v)+p(w))}[v,[w,u]] + (-1)^{p(w)(p(u)+p(v))}[w,[u,v]] = 0$).

Le contexte étant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, on utilise une indéterminée ε, de carré 1, pour différencier les parties paires et impaires.

DÉFINITION 1.1. — *Soit $V = V_0 \oplus V_1$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, de* (*super*) *dimension $k+\varepsilon l$* (*i.e. la dimension de la partie paire est k et la dimension de la partie impaire est l*) ; *on notera $\mathfrak{gl}(V)$ la super algèbre de Lie des endomorphismes gradués de V* (*qui est isomorphe à $\mathfrak{gl}(k,l)$ par le choix d'une base homogène de V*).

*On dira que V est un $\mathfrak{g}$-***module***, ou une* **représentation** *de $\mathfrak{g}$, si on s'est donné un morphisme de super algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.*

On dira que la représentation V est **irréductible** *ou* **simple** *si elle ne contient aucune sous-représentation non triviale.*

Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ constituée des matrices diagonales (remarquons que $\mathfrak{h}$ contient le centre de dimension 1 de $\mathfrak{g}$).

Racines de $\mathfrak{g}$

L'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ est par définition constitué de l'ensemble Δ_0 des racines (au sens de [3]) de $\mathfrak{g}_0$ et de l'ensemble Δ_1 des poids de $\mathfrak{g}_1$, vu comme $\mathfrak{g}_0$-module.

Remarquons que l'on peut munir $\mathfrak{g}$ d'une graduation sur $\mathbb{Z}$, compatible avec la structure de super algèbre de Lie, en posant :

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0,$$

$$\mathfrak{g}^{+1} = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), B \in Hom(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)\},$$

$$\mathfrak{g}^{-1} = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{smallmatrix}\right), C \in Hom(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)\}.$$

Notons $\mathfrak{b}_0$ la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_0$ formée des matrices triangulaires supérieures par blocs ; alors $\mathfrak{b} := \mathfrak{b}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}$ est une *sous-algèbre de Borel* de $\mathfrak{g}$ ce qui permet, comme dans le cas classique, de séparer les racines de $\mathfrak{g}$ en racines positives et négatives.

On note $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq m+n}$ la base usuelle de $\mathfrak{g}$ et $(E^*_{i,j})_{1\leq i,j\leq m+n}$ la base duale. On appelle *super trace* la forme linéaire $Str = E^*_{1,1}+\cdots+E^*_{m,m}-E^*_{m+1,m+1}-\cdots-E^*_{m+n,m+n}$. Elle est $\mathfrak{g}$-invariante, et permet de définir une forme bilinéaire $\mathfrak{g}$-invariante non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ par $B(u,v) := Str(v.u)$ pour u et v dans $\mathfrak{g}$. Sa restriction à $\mathfrak{h}$ est encore non dégénérée et on note $\langle\ ;\ \rangle$ le produit scalaire sur $\mathfrak{h}^*$ qui s'en déduit.

Si on note ε_i (resp. δ_j) l'élément $E^*_{i,i}$ (resp. $E^*_{m+j,m+j}$) de $\mathfrak{g}^*$, alors les ε_i, $1\leq i\leq m$, et les δ_j, $1\leq j\leq n$, forment une base de $\mathfrak{h}^*$ et on a $\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\delta_{ij}$, $\langle\delta_i,\delta_j\rangle=-\delta_{ij}$ et $\langle\varepsilon_i,\delta_j\rangle=0$. On pose :

$$\Delta_0^+ = \{(\varepsilon_i-\varepsilon_j), 1\leq i<j\leq m\}\cup\{(\delta_i-\delta_j), 1\leq i<j\leq n\},$$

$$\Delta_1^+ = \{(\varepsilon_i-\delta_j), 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n\},$$

avec $\Delta_0=\Delta_0^+\cup-\Delta_0^+$ et $\Delta_1=\Delta_1^+\cup-\Delta_1^+$. Remarquons que toutes les racines de Δ_1, qu'on appelle racines *impaires*, sont isotropes. Les racines de Δ_0 sont dites *paires*.

Enfin, on notera W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}_0$, identifié au produit de groupes symétriques $\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n$.

Modules et poids

On étudie ici les $\mathfrak{g}$-modules dans lesquels la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ agit de manière diagonalisable. Tout $\mathfrak{g}$-module est un $\mathfrak{g}_0$-module, par restriction. Les $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie ont des *poids*, qui correspondent aux valeurs propres de $\mathfrak{h}$ agissant sur ceux-ci. Ce sont des éléments de $\mathfrak{h}^*$.

Soit $\lambda\in\mathfrak{h}^*$; on dit que λ est un *poids entier* si les coordonnées de λ dans la base ci-dessus sont entières (ce qui implique que $\langle\lambda,\alpha\rangle\in\mathbb{Z}$, $\forall\alpha\in\Delta_0$), et on note P l'ensemble des poids entiers.

On pose $\rho=\frac{1}{2}(\sum_{\alpha\in\Delta_0^+}\alpha-\sum_{\alpha\in\Delta_1^+}\alpha)$. On a

$$\begin{aligned}\rho =&\frac{1}{2}((m-n-1)\varepsilon_1+(m-n-3)\varepsilon_2+\dots(-m-n+1)\varepsilon_m+\\ &+(m+n-1)\delta_1+(m+n-3)\delta_2+\cdots+(m-n+1)\delta_n)\end{aligned}$$

et, pour toute racine paire α, on pose $\alpha^\vee=\frac{2\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$. On dira que λ est un *poids dominant* si $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\in\mathbb{N}$, $\forall\alpha\in\Delta_0^+$. On note P^+ l'ensemble des poids dominants.

Si $\lambda=a_1\varepsilon_1+\cdots+a_m\varepsilon_m+b_1\delta_1+\cdots+b_n\delta_n$, on a :

$\lambda\in P^+\Leftrightarrow\lambda\in P$ et $a_1\geq\cdots\geq a_m$, $b_1\geq\cdots\geq b_n$.

De plus, si $\lambda\in P^+$, on a alors $\lambda+\rho=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_m\varepsilon_m+y_1\delta_1+\cdots+y_n\delta_n$ avec $x_1>\cdots>x_m$, $x_{i+1}-x_i\in\mathbb{Z}$ et $y_1>\cdots>y_n$, $y_{i+1}-y_i\in\mathbb{Z}$.

On dispose par ailleurs d'un *ordre partiel* sur les poids entiers défini par : si λ et μ sont dans P, on dit que $\lambda\geq\mu$ si $\lambda-\mu$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$, $\sum_{\alpha_k\in\Delta_0^+\cup\Delta_1^+}n_k\alpha_k$.

Remarque 1.2. — La catégorie des $\mathfrak{g}$-modules $\mathfrak{h}$-diagonalisables de dimension finie, $\mathcal{F}$, munie des morphismes de $\mathfrak{g}$-modules de degré 0, est abélienne mais n'est pas semi-simple, contrairement à la catégorie correspondante pour $\mathfrak{g}_0$. D'autre part, un $\mathfrak{g}$-module irréductible V de $\mathcal{F}$ a un *plus haut poids*, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in P^+$ tel que, pour tout poids μ de V, on a $\lambda \geq \mu$.

Algèbre enveloppante et caractère infinitésimal

Comme dans le cas classique (voir [5]), on dispose de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, d'un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, et du centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Contrairement à ce dont nous avons l'habitude, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ n'est plus un anneau de polynômes. L'article [15] donne une description complète de la structure de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Par le lemme de Schur, si V est un $\mathfrak{g}$-module irréductible de dimension finie, tout élément z de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ agit par un scalaire $z(V)$ sur V et on peut donc définir le *caractère infinitésimal* associé à V sur $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$:

$$\chi_V : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C},\ z \mapsto z(V).$$

De même, si V est un module indécomposable avec plus haut poids (par exemple un module de Kac ou un module de Verma, voir les définitions dans l'alinéa suivant), tout élément z de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ agit par un scalaire sur V et χ_V est bien défini.

Construction de modules de plus haut poids

Soit $\lambda \in P$. On construit le *module de Verma* M_λ de plus haut poids λ : soit $\mathbb{C}_\lambda$ le caractère de $\mathfrak{b}$ qui étend trivialement le caractère λ de $\mathfrak{h}$. On pose :

$$M_\lambda = Ind_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\mathbb{C}_\lambda.$$

C'est un $\mathfrak{g}$-module de dimension infinie qui admet un unique sous-module maximal, il est donc indécomposable. On note L_λ son unique quotient simple, c'est le $\mathfrak{g}$-*module simple de plus haut poids* λ, on démontre ([8]) que L_λ est de dimension finie si et seulement si $\lambda \in P^+$.

Remarquons maintenant que, si $\lambda \in P^+$, alors il existe un $\mathfrak{g}_0$-module simple de plus haut poids λ et de dimension finie, que nous noterons $L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$. On étend trivialement l'action à $\mathfrak{g}^{+1}$, ce qui nous donne un $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}$-module de dimension finie. On fait enfin une induction en posant :

$$V_\lambda = Ind_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} L_\lambda(\mathfrak{g}_0).$$

Or l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}^{-1}$ est isomorphe, comme $\mathbb{C}$-algèbre, à l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{g}^{-1}$. En faisant cette induction, on obtient donc un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie V_λ indécomposable qui s'appelle le *module de Kac* de plus haut poids λ. Le module simple L_λ est un quotient de V_λ.

Modules typiques et atypiques

Rappelons que, dans le cas classique, si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie réductive et si on a choisi $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan contenue dans une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{a}$, soient λ et μ deux poids entiers ; notons χ_λ le caractère infinitésimal associé au