

**ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE POSITIVE ET
DISQUES DE SIEGEL DES POLYNÔMES QUADRATIQUES**
[d'après X. Buff et A. Chéritat]

par **Jean-Christophe YOCCOZ**

1. ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE POSITIVE

1.1. Soit R une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ opérant sur la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Le multiplicateur d'un point périodique z_0 de R , de période minimale n , est $\lambda = (R^n)'(z_0)$. On dit que z_0 est attractif si $|\lambda| < 1$, répulsif si $|\lambda| > 1$, indifférent si $|\lambda| = 1$. Un point périodique indifférent est parabolique si $\lambda = 1$, rationnel si λ est racine de l'unité, irrationnel dans le cas contraire.

L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \overline{\mathbf{C}}$ au voisinage desquels les itérés $(R^n)_{n \geq 1}$ forment une famille normale. Son complémentaire dans $\overline{\mathbf{C}}$ est l'ensemble de Julia $J(R)$.

L'ensemble de Fatou est ouvert et totalement invariant : $R^{-1}(F(R)) = F(R)$. L'image par R d'une composante connexe de $F(R)$ est encore une composante connexe de $F(R)$. Un célèbre théorème de D. Sullivan affirme que chaque composante est pré-périodique sous l'action de R . Il y a au plus $2d - 2$ cycles de composantes périodiques. La dynamique dans une composante fixe est d'un des 3 types suivants :

- convergence vers un point fixe attractif ;
- convergence vers un point fixe parabolique situé sur le bord de la composante ;
- dynamique quasi périodique conjuguée à une rotation irrationnelle sur un disque (dit de Siegel) ou un anneau (dit de Herman).

L'ensemble de Julia est une partie compacte, totalement invariante, qui n'est jamais vide. C'est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de R . La dynamique y est chaotique, au moins topologiquement, dans le sens suivant : pour tout ouvert U rencontrant $J(R)$, il existe $N \geq 1$ tel que $R^N(U)$ contienne $J(R)$.

L'ensemble de Fatou peut être vide. C'est le cas, en particulier, pour les exemples de Lattès déduits via la fonction de Weierstrass des endomorphismes non inversibles des courbes elliptiques. M. Rees a montré que dans l'espace (de dimension complexe $2d - 2$) des fractions rationnelles de degré d , celles pour lesquelles l'ensemble de Fatou est vide forment un ensemble de mesure de Lebesgue positive. Cependant, lorsque l'ensemble de Julia n'est pas égal à la sphère de Riemann tout entière, c'est un ensemble d'intérieur vide.

Pour un polynôme P de degré $d \geq 2$, la présence d'un point fixe (super)attractif à l'infini rend les choses un peu plus simples : l'ensemble de Fatou n'est jamais vide. On appelle ensemble de Julia rempli l'ensemble $K(P)$ des points $z \in \mathbf{C}$ d'orbite bornée. C'est une partie compacte totalement invariante de $\mathbf{C}$ dont le bord est égal à $J(P)$.

1.2. Dès le début du siècle dernier, P. Fatou suggère d'étudier les ensembles de Julia par les méthodes de la théorie de la mesure de Borel-Lebesgue. Vers 1980, D. Sullivan développe et met à profit des analogies profondes entre l'itération des fractions rationnelles et l'action des groupes kleinien (i.e. des sous-groupes discrets de type fini de $PSL(2, \mathbf{C})$) sur la sphère de Riemann. Pour un groupe kleinien, l'ensemble limite joue le rôle de l'ensemble de Julia. Une conjecture d'Ahlfors, maintenant démontrée, affirme que l'ensemble limite est de mesure nulle s'il n'est pas égal à la sphère de Riemann. La question analogue pour les ensembles de Julia s'impose alors rapidement comme l'un des problèmes majeurs de la théorie, d'autant plus qu'une réponse positive aurait de nombreuses conséquences intéressantes. Dans les années suivantes on montre en particulier pour de nombreuses classes de polynômes (cf. ci-dessous) que l'ensemble de Julia est de mesure nulle.

Cependant, vers 1990, T. Nowicki et S. Van Strien d'une part, A. Douady d'autre part, commencent à suspecter qu'il pourrait exister des polynômes dont l'ensemble de Julia est de mesure de Lebesgue positive. T. Nowicki et S. Van Strien considèrent des polynômes $P(z) = z^d + c$, de grand degré d , pour lesquels l'orbite de l'unique point critique 0 s'organise suivant une combinatoire quasipériodique dite de Fibonacci ; mais leur programme n'aboutira pas.

A. Douady formule de son côté un programme visant à construire des polynômes quadratiques possédant un point fixe indifférent irrationnel non linéarisable dont l'ensemble de Julia (égal dans ce cas à l'ensemble de Julia rempli) est de mesure positive. Dans sa thèse [9], A. Chéritat réalise des progrès majeurs qui ne laissent plus de doute sur l'existence de tels polynômes. S'appuyant sur des travaux récents de Inou-Shishikura [13], X. Buff et A. Chéritat ont finalement obtenu ([7], [5]) le

THÉORÈME — *Il existe des polynômes quadratiques dont l'ensemble de Julia est de mesure de Lebesgue strictement positive.*

1.3. Dans la prochaine section, nous présentons quelques préliminaires sur la dynamique des polynômes quadratiques, en particulier ceux possédant un point fixe indifférent irrationnel. Cela nous permettra d'énoncer des versions un peu plus précises du théorème précédent. Dans la section suivante, on présente le plan de la construction, une version simplifiée de la proposition initiale de Douady, qui comporte 3 étapes. Ces étapes sont passées en revue au cours des 3 sections suivantes. Dans la dernière section, nous présenterons plusieurs résultats spectaculaires sur les disques de Siegel des polynômes quadratiques obtenus par X. Buff et A. Chéritat, résultats qui utilisent certains des ingrédients essentiels de la construction précédente.

Je remercie Xavier Buff, Arnaud Chéritat et Adrien Douady pour de nombreuses et précieuses conversations, et Dominique Bidois sans laquelle ce texte n'aurait pas vu le jour à temps.

2. RAPPELS SUR LES POLYNÔMES QUADRATIQUES

2.1. À conjugaison affine près, un polynôme quadratique s'écrit de façon unique sous la forme

$$Q_c(x) = x^2 + c.$$

L'ensemble des paramètres c pour lesquels le point critique 0 a une orbite bornée est l'ensemble de Mandelbrot M . C'est aussi l'ensemble des paramètres pour lesquels l'ensemble de Julia rempli $K(Q_c)$ est connexe.

Quand on s'intéresse à un point fixe et à son multiplicateur, il est plus pratique d'effectuer un revêtement ramifié $c = \lambda/2 - \lambda^2/4$ dans le plan des paramètres et une translation $x = z + \lambda/2$ dans le plan dynamique : le point 0 est alors fixe, de multiplicateur λ . Seul le cas où $|\lambda|$ est égal ou voisin de 1 nous intéresse, on écrira $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$ et on considérera donc la famille

$$P_\alpha(z) = \lambda z + z^2.$$

L'image du disque $\{|\lambda| < 1\}$ par le revêtement $\lambda \rightarrow c = \lambda/2 - \lambda^2/4$ (ramifié en $\lambda = 1$ au-dessus de $c = 1/4$) est la cardioïde principale de M .

2.2. Si $c \notin M$, le point critique 0 s'échappe vers le point fixe attractif à l'infini ; l'ensemble de Julia $J(Q_c) = K(Q_c)$ est un ensemble de Cantor sur lequel le polynôme est uniformément dilatant.

Si Q_c possède une orbite périodique $\mathcal{O}$ attractive ou indifférente, alors $c \in M$ et les autres orbites périodiques sont répulsives ; si $\mathcal{O}$ est attractive ou indifférente rationnelle, l'orbite du point critique 0 converge vers $\mathcal{O}$; l'intérieur de $K(Q_c)$ est alors exactement égal au bassin de $\mathcal{O}$. Si $\mathcal{O}$ est attractive, le polynôme Q_c est uniformément

dilatant sur $J(Q_c)$. On dit que Q_c est hyperbolique si $c \notin M$ ou si Q_c possède une orbite périodique attractive (à distance finie).

2.3. Soit n un entier au moins égal à 2. On dit que Q_c est n -renormalisable s'il existe des disques topologiques U, V avec $0 \in U \subset\subset V$ tels que la restriction de Q_c^n à U soit un revêtement ramifié sur V de degré 2 et $Q_c^{nk}(0)$ appartienne à U pour tout $k \geq 0$. On dit que Q_c est infiniment renormalisable s'il existe une infinité d'entiers n tels que Q_c soit n -renormalisable.

2.4. Soit Q_c un polynôme quadratique possédant un point périodique indifférent irrationnel x_0 , de période minimale N et multiplicateur $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$. On dit que x_0 est linéarisable si x_0 appartient à l'intérieur de $K(Q_c)$; on appelle alors disque de Siegel la composante connexe Δ de $\text{int}K(Q_c)$ qui contient x_0 ; c'est un disque topologique et toute représentation conforme $\alpha : (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (\Delta, x_0)$ conjugue la rotation $R_\alpha(z) = \lambda z$ à la restriction de Q_c^N à Δ .

Lorsque x_0 n'est pas linéarisable, on a $K(Q_c) = J(Q_c)$; on dit que x_0 est un point de Cremer.

Notons

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

le développement en fraction continue de α et $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ les réduites associées. Alors, pour que x_0 soit linéarisable, il faut et il suffit que α vérifie la condition de Brjuno (cf. [22], [2], [23])

$$\sum_{n \geq 0} q_n^{-1} \log q_{n+1} < +\infty.$$

On dit que α est de type constant si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est bornée. La condition de Brjuno est alors satisfaite. Un théorème de Herman-Swiatak affirme que Δ est un quasidisque et que le point critique appartient au bord de l'orbite de Δ .

2.5. On sait que l'ensemble de Julia $J(Q_c)$ est de mesure nulle dans chacun des cas suivants :

- Q_c est hyperbolique ;
- Q_c possède un point périodique indifférent rationnel ([11]) ;
- Q_c n'est pas infiniment renormalisable et toutes ses orbites périodiques sont répulsives ([15], [21]) ;
- Q_c possède un point périodique indifférent irrationnel dont le multiplicateur $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$ vérifie $\log a_n = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ ([20]).

Dans tous les cas restants, Buff et Chéritat ont construit des exemples pour lesquels l'ensemble de Julia est de mesure positive.

THÉORÈME. — 1) *Il existe des paramètres c tels que Q_c a un point fixe de Cremer et $J(Q_c)$ est de mesure positive.*

2) *Il existe des paramètres c tels que Q_c a un disque de Siegel fixe et $J(Q_c)$ est de mesure positive.*

3) *Il existe des paramètres c tels que Q_c est infiniment renormalisable et $J(Q_c)$ est de mesure positive.*

Dans la suite, nous décrirons la construction dans le cas des points de Cremer. Les autres cas sont basés sur les mêmes méthodes, avec quelques subtilités supplémentaires.

3. PRINCIPE DE LA CONSTRUCTION

3.1. Comme on s'intéresse à des points fixes indifférents, on va écrire (cf. §2.1)

$$P_\alpha(z) = \lambda z + z^2, \quad \lambda = \exp 2\pi i \alpha.$$

On notera pour simplifier $K_\alpha = K(P_\alpha)$, $J_\alpha = J(P_\alpha)$.

Soit N un entier assez grand, qui sera déterminé ultérieurement (voir §5). On note $\mathcal{C}(N)$ l'ensemble des nombres de type constant tels que $a_n \geq N$ pour tout $n \geq 1$. Pour $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$, $n \geq 0$ et $A \geq 1$, on pose

$$\alpha(n, A) = [a_0, a_1, \dots, a_n, A, N, N, N, \dots]$$

On a donc $\alpha(n, A) \in \mathcal{C}(N)$ si $\alpha \in \mathcal{C}(N)$ et $A \geq N$.

PROPOSITION. — Soient $\alpha \in \mathcal{C}(N)$, A_n une suite telle que $\lim q_n^{-1} \log A_n = +\infty$, et soit $\varepsilon > 0$. Si n est assez grand, on a

$$\text{Leb}(K_{\alpha(n, A_n)}) \geq (1 - \varepsilon) \text{Leb}(K_\alpha)$$

et le disque $\{|z| < \varepsilon\}$ contient un cycle périodique de $P_{\alpha(n, A_n)}$ distinct de $\{0\}$.

REMARQUE. — Cet énoncé est très probablement vrai pour tout entier $N \geq 1$, mais n'est démontré que si l'entier N est assez grand.

3.2. La proposition permet de réaliser la construction recherchée. On définit en effet une suite $(\alpha_\ell)_{\ell \geq 0}$ dans $\mathcal{C}(N)$ comme suit. On choisit arbitrairement $\alpha_0 \in \mathcal{C}(N)$, puis on construit $\alpha_{\ell+1}$ à partir de α_ℓ en posant

$$\alpha_{\ell+1} = \alpha_\ell(n, A_n).$$

Ici, la suite (A_n) est choisie de façon à vérifier l'hypothèse de la proposition et l'entier $n = n_\ell$ est choisi assez grand pour que les conclusions de la proposition