Astérisque
346, 2012, p. 313–318

UNE VARIANTE D'UN RÉSULTAT DE AIZENBUD, GOUREVITCH, RALLIS ET SCHIFFMANN

par

Jean-Loup Waldspurger

Résumé. — Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann ont prouvé un théorème de multiplicité 1 pour les restrictions des représentations irréductibles de certains groupes classiques p-adiques. Leur théorème s'applique aux groupes orthogonaux. En utilisant une variante de leur méthode, nous prouvons le même théorème pour les groupes p-adiques spéciaux orthogonaux.

Abstract **(A variant of a result by Aizenbud, Gourevitch, Rallis and Schiffmann)**

Aizenbud, Gourevitch, Rallis and Schiffmann have proved a multiplicity one theorem for restrictions of irreducible representations of certain p-adic classical groups. Their theorem applies to orthogonal groups. Using a variant of their method, we prove the same theorem for p-adic special orthogonal groups.

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, W un espace vectoriel sur F de dimension finie ≥ 1, $< .,. >$ une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur W, $W = V \oplus U$ une décomposition orthogonale où U est une droite. On note M, resp. G, le groupe orthogonal de W, resp. V, et M^0, resp. G^0, le sous-groupe spécial orthogonal (plus exactement, on note ainsi les groupes de points sur F de ces groupes algébriques). Le groupe G s'identifie au sous-groupe des éléments de M qui fixent U point par point. On veut prouver le théorème suivant.

Théorème 1. — *Soient π, resp. ρ, une représentation admissible irréductible de M^0, resp. G^0. Alors* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G^0}(\pi_{|G^0}, \rho)) \leq 1$.

Dans l'article [**1**], les auteurs démontrent plusieurs résultats de ce genre et en particulier l'analogue du théorème ci-dessus où les groupes spéciaux orthogonaux sont remplacés par les groupes orthogonaux. Le cas des groupes spéciaux orthogonaux a une certaine importance, en particulier si l'on s'intéresse à la conjecture locale de Gross-Prasad ([**2**], conjecture 10.7). La preuve du théorème 1 que l'on présente ci-dessous est une simple variante de celle de [**1**]. On n'en détaillera que les parties qui diffèrent sensiblement de celle-là. Je remercie vivement G. Henniart pour m'avoir

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 22E50.
Mots clefs. — Groupes spéciaux orthogonaux, multiplicité 1.

signalé le problème et pour des remarques pertinentes sur une première version de l'article. Je remercie également le referee pour sa lecture soigneuse.

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G^0. Posons $\tilde{G} = G \times \{\pm 1\}$. Ce groupe agit sur G^0, $\mathfrak{g}$ et V par

$$(g,\varepsilon)x = gx^{\varepsilon}g^{-1},\ (g,\varepsilon)X = \varepsilon gXg^{-1},\ (g,\varepsilon)v = \varepsilon gv,$$

pour $(g,\varepsilon) \in \tilde{G}$, $x \in G^0$, $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. On construit de même un groupe $\tilde{M}$. Par l'inclusion évidente $\tilde{G} \subset \tilde{M}$, le groupe $\tilde{G}$ agit sur M^0. Notons $e(V)$ la partie entière de $(\dim(V)+1)/2$ (seule importera la parité de ce nombre). Notons $\bar{G}$ le sous-groupe des éléments $(g,\varepsilon) \in \tilde{G}$ tels que $\text{dét}(g) = \varepsilon^{e(V)}$. Notons χ le caractère $(g,\varepsilon) \mapsto \varepsilon$ de $\bar{G}$ et, pour tout espace vectoriel complexe $\mathcal{S}$ sur lequel $\bar{G}$ agit, notons $\mathcal{S}^{\bar{G},\chi}$ le sous-espace des éléments qui se transforment sous l'action de $\bar{G}$ selon le caractère χ. Pour tout espace topologique X localement compact et totalement discontinu, on note $\mathcal{S}(X)$ l'espace des fonctions sur X à valeurs complexes, localement constantes et à support compact, et $\mathcal{S}'(X)$ l'espace vectoriel dual. On a

Théorème 1'. — *L'espace $\mathcal{S}'(M^0)^{\bar{G},\chi}$ est nul.*

Prouvons que ce théorème entraîne le théorème 1. On fixe $g \in G$ tel que $g^2 = 1$ et $\text{dét}(g) = (-1)^{e(V)}$. On note σ l'anti-involution $x \mapsto gx^{-1}g^{-1}$ de M^0. Le théorème $1'$ implique que toute distribution sur M^0 invariante par conjugaison par G^0 est invariante par σ. Le corollaire 1.1 de [**1**] s'applique : pour π et ρ comme dans le théorème 1, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{G^0}(\pi_{|G^0}, \rho^*)\dim_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{G^0}((\pi^*)_{|G^0}, \rho)) \leq 1.$$

Il reste à prouver que

$$(1)\qquad \text{Hom}_{G^0}(\pi_{|G^0}, \rho^*) \simeq \text{Hom}_{G^0}(\pi_{|G^0}, \rho) \simeq \text{Hom}_{G^0}((\pi^*)_{|G^0}, \rho).$$

Pour $\delta \in M$ tel que $\text{dét}(\delta) = -1$, définissons la représentation π^{δ} de M^0 par $\pi^{\delta}(x) = \pi(\delta x\delta^{-1})$. Sa classe d'isomorphie ne dépend pas de δ. On sait que toute représentation de M est auto-duale ([**3**], chapitre IV, théorème II.1). Il en résulte aisément que π^* est isomorphe à π ou à π^{δ}. Dans le cas où $\dim(W)$ est impaire, on peut choisir δ central, d'où $\pi^* \simeq \pi \simeq \pi^{\delta}$. Des propriétés analogues valent en remplaçant W et π par V et ρ. De plus, on peut choisir un même élément $\delta \in G$ pour définir π^{δ} et ρ^{δ}. L'égalité suivante est alors immédiate :

$$\text{Hom}_{G^0}(\pi^{\delta}_{|G^0}, \rho^{\delta}) = \text{Hom}_{G^0}(\pi_{|G^0}, \rho).$$

La relation (1) s'ensuit. □

Prouvons le théorème $1'$. On définit le groupe $\bar{M}$ comme on a défini $\bar{G}$. Remarquons que, si $e(V) \neq e(W)$, $\bar{G}$ n'est pas un sous-groupe de $\bar{M}$. On a :

Proposition. — *Supposons que $\mathcal{S}'(M^0 \times W)^{\bar{M},\chi} = \{0\}$. Alors $\mathcal{S}'(M^0)^{\bar{G},\chi} = \{0\}$.*

Démonstration. — Fixons un élément non nul $e \in U$. Par descente de Frobenius (cf. [**1**] preuve de la proposition 5.1), l'hypothèse implique que $\mathcal{S}'(M^0)^{\bar{M}_e,\chi} = \{0\}$, où $\bar{M}_e$ est le fixateur de e dans $\bar{M}$. Ce fixateur est l'ensemble des $(m, \varepsilon) \in \bar{M}$ tels que $m = g \oplus \varepsilon$ conformément à la décomposition $W = V \oplus U$, avec $g \in G$. Notons ε_M l'homothétie dans W de rapport ε. C'est un élément central dans M, et on a aussi $m = \varepsilon_M(g \oplus 1)$, avec un autre g. La condition $(m, \varepsilon) \in \bar{M}$ signifie que $\text{dét}(g) = \varepsilon^{\dim(W)+e(W)}$. Or $\dim(W) + e(W) \equiv e(V) \bmod 2\mathbb{Z}$. Donc $\bar{M}_e$ est l'ensemble des $(\varepsilon_M, 1)(g, \varepsilon)$, avec $(g, \varepsilon) \in \bar{G}$. Puisque $(\varepsilon_M, 1)$ agit trivialement sur M^0, on en déduit $\mathcal{S}'(M^0)^{\bar{G},\chi} = \{0\}$. □

Désormais, on oublie M et W et on va prouver $\mathcal{S}'(G^0 \times V)^{\bar{G},\chi} = \{0\}$. On prouve simultanément $\mathcal{S}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G},\chi} = \{0\}$. On raisonne par récurrence sur $d = \dim(V)$. On vérifie immédiatement les deux assertions pour $d = 1$. Pour $d = 2$, les actions de $\bar{G}$ sur G^0 et $\mathfrak{g}$ sont triviales. D'après le principe de localisation ([**1**] théorème 2.1), on doit montrer que $\mathcal{S}'(V)^{\bar{G},\chi} = \{0\}$. Pour $\alpha \in F$, notons Γ_α l'ensemble des $v \in V$ tels que $< v, v >= \alpha$. D'après le même principe de localisation, et parce que l'action de $\bar{G}$ respecte la forme quadratique, il suffit de montrer que $\mathcal{S}'(\Gamma_\alpha)^{\bar{G},\chi} = \{0\}$ pour tout $\alpha \in F$. Si $\alpha \neq 0$, Γ_α est une seule orbite pour l'action de G^0 et la nullité cherchée s'ensuit. Reste l'ensemble Γ_0. Si la forme quadratique est anisotrope, il est réduit au point 0 et le résultat est clair. Sinon, dans une base convenable, Γ_0 est l'ensemble des (x, y) tels que $xy = 0$. Sur $\Gamma_0 \setminus \{0\}$, on voit qu'un élément $T \in \mathcal{S}'(V)^{\bar{G},\chi}$ est forcément multiple de la distribution

$$f \mapsto \int_{F^\times} f(x, 0)d^*x - \int_{F^\times} f(0, y)d^*y,$$

avec des mesures de Haar pour la multiplication. Or cette distribution ne se prolonge pas à Γ_0 tout entier en une distribution G^0-invariante (c'est l'exemple donné dans l'introduction de [**1**]). Donc T est nulle sur $\Gamma_0 \setminus \{0\}$. Et, comme précédemment, T ne peut pas avoir pour support le seul point 0. Donc $T = 0$. Désormais, on suppose $d \geq 3$, donc le centre Z de G^0 a au plus deux éléments.

Lemme 1. — *Soit $T \in \mathcal{S}'(G^0 \times V)^{\bar{G},\chi}$, resp. $T \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G},\chi}$. Alors le support de T est contenu dans $Z\mathcal{U} \times V$, resp $\mathcal{N} \times V$.*

Prouvons l'assertion relative à $\mathcal{S}'(G^0 \times V)^{\bar{G},\chi}$, en se référant à [**1**], lemme 5.1, dont on utilise les notations. Soit $a \in G^0$ semi-simple non central. On peut décomposer V en somme orthogonale $V = V_+ \oplus V_- \oplus \oplus_{i \in I} V_i$. Pour tout $i \in I$, on a une suite d'extensions $F_i/F_{\pm i}/F$, où $[F_i : F_{\pm i}] = 2$. On admet formellement le cas où $F_i/F_{\pm i}$ est une algèbre quadratique « déployée », c'est-à-dire $F_i = F_{\pm i} \oplus F_{\pm i}$, l'involution échangeant les deux facteurs. L'espace V_i a une structure de F_i-espace vectoriel et est muni d'une forme hermitienne non dégénérée, relativement à l'extension $F_i/F_{\pm i}$. L'élément a agit par multiplication par 1 sur V_+, -1 sur V_- et a_i sur V_i, où a_i est un élément de $F_i^\times$ tel que $a_i \neq \pm 1$ et $\text{Norm}_{F_i/F_{\pm i}}(a_i) = 1$. La composante neutre du commutant de a dans G^0 est $G_+^0 \times G_-^0 \times \prod_{i \in I} G_i$, où les G_i sont des groupes unitaires (en un sens approprié si $F_i = F_{\pm i} \oplus F_{\pm i}$). Les éléments de G^0 de partie semi-simple a sont produits de a et d'éléments de ce groupe. L'argument de [**1**] nous ramène à construire un élément $(g,-1) \in \bar{G}$, fixant a, et vérifiant la propriété suivante. Considérons $T_+ \in \mathcal{S}'(G_+^0 \times V_+)^{G_+^0}$, $T_- \in \mathcal{S}'(G_-^0 \times V_-)^{G_-^0}$ et, pour tout $i \in I$, $T_i \in \mathcal{S}'(G_i \times V_i)^{G_i}$. Alors $T = T_+ \otimes T_- \otimes \otimes_{i\in I} T_i$ est fixe par l'action de $(g,-1)$. On prend $g_+ \in G_+$ tel que $(g_+,-1) \in \bar{G}_+$, $g_- \in G_-$ tel que $(g_-,-1) \in \bar{G}_-$ et, pour tout $i \in I$, un automorphisme antilinéaire de V_i (relativement à l'extension $F_i/F_{\pm i}$) préservant la forme hermitienne. On prend $g = g_+ \times g_- \times \prod_{i\in I} g_i$. D'après les résultats de [**1**] pour les groupes unitaires ou linéaires, et d'après l'hypothèse de récurrence, l'élément $(g,-1)$ fixe T. Il fixe a. Il suffit de vérifier que $(g,-1)$ appartient à $\bar{G}$. Pour tout $i \in I$, $\dim_F(V_i)$ est paire et $\mathrm{dét}(g_i) = (-1)^{\dim_F(V_i)/2}$. Parce que $a \in G^0$, $\dim(V_-)$ est paire et $\mathrm{dét}(g_-) = (-1)^{e(V_-)} = (-1)^{\dim(V_-)/2}$. On a $\mathrm{dét}(g_+) = (-1)^{e(V_+)}$. Donc $\mathrm{dét}(g) = (-1)^e$, où $e = e(V_+) + \frac{\dim(V)-\dim(V_+)}{2}$. Or $e \equiv e(V) \bmod 2\mathbb{Z}$.

La preuve de l'assertion relative à $\mathcal{S}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G},\chi}$ est similaire : l'élément a est remplacé par un élément $X \in \mathfrak{g}$ non nul ; l'espace $V_+ \oplus V_-$ est remplacé par un unique espace V_0 qui est annulé par X ; les éléments a_i sont remplacés par des $X_i \in F_i$ de trace nulle. □

Tout élément de Z étant invariant par $\bar{G}$, on est ramené aux distributions sur $\mathcal{U} \times V$, que l'on descend par l'application de Cayley aux distributions sur $\mathcal{N} \times V$. Cela nous ramène au problème sur l'algèbre de Lie. Notons Γ l'ensemble des $v \in V$ tels que $< v, v >= 0$.

Lemme 2. — *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G},\chi}$. Alors le support de T est contenu dans $\mathfrak{g} \times \Gamma$.*

Cf. [**1**] prop. 5.2. On fixe $v \in V$ avec $< v, v >\neq 0$, on va montrer que $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})^{\bar{G}_v,\chi} = \{0\}$, où $\bar{G}_v$ est le fixateur de v. Notons V_1 l'orthogonal de v dans V et G_1 le groupe orthogonal de V_1. Comme dans la preuve de la proposition ci-dessus, l'application $(g_1,\varepsilon) \mapsto (\varepsilon_G, 1)(g_1,\varepsilon)$ est un isomorphisme de $\bar{G}_1$ sur $\bar{G}_v$. On a aussi $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus V_1$. Via ces deux isomorphismes, l'action de $\bar{G}_1$ sur $\mathfrak{g}_1 \oplus V_1$ est « la bonne », c'est-à-dire celle définie avant l'énoncé du théorème $1'$. Le lemme résulte de l'hypothèse de récurrence. □

On utilise maintenant l'argument de [**1**] lemme 4.3 et remarque avant le lemme 4.4. Munissons $\mathfrak{g}$ de la forme bilinéaire symétrique $(X,Y) \mapsto \mathrm{trace}(XY)$. On définit deux transformations de Fourier partielles $T \mapsto \mathcal{F}_{\mathfrak{g}} T$ et $T \mapsto \mathcal{F}_V T$ sur $\mathcal{S}'(\mathfrak{g}\times V)$, la première en la variable dans $\mathfrak{g}$ (relativement à la forme ci-dessus), la seconde en la variable dans V, relativement à la forme $< .,. >$. Elles conservent l'espace $\mathcal{S}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G},\chi}$. On a aussi deux représentations de Weil du groupe métaplectique $\tilde{SL}_2$, pour chacune de ces formes quadratiques. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G},\chi}$. D'après le lemme 1, T est à support dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}} T$ l'est aussi. Donc T est invariante par la première représentation de Weil. De même, grâce au lemme 2, T est invariante par la seconde représentation de Weil. En dimension impaire, une représentation de Weil ne se descend pas au groupe SL_2, l'élément du noyau de la projection de $\tilde{SL}_2$ sur SL_2 agit par multiplication par -1 et tout invariant est nul. Donc T est nulle si $\dim(\mathfrak{g})$ est impaire ou si $\dim(V)$ est impaire. On a posé $d = \dim(V)$. On a $\dim(\mathfrak{g}) = d(d-1)/2$. Donc T est nulle si d est impaire ou si $d \equiv 2 \bmod 4\mathbb{Z}$. On suppose maintenant $d \equiv 0 \bmod 4\mathbb{Z}$. On utilise la preuve de [**1**] paragraphe 6. Elle montre que le support de nos distributions est contenu dans l'ensemble des (X, v), $X \in \mathcal{N}$ et $v \in Q(X)$ (l'ensemble $Q(X)$ est défini en loc.cit.). Elle montre aussi qu'il suffit de fixer X nilpotent et, en notant $\bar{G}_X$ son fixateur dans $\bar{G}$, de prouver le lemme suivant. On note $T \mapsto \hat{T}$ la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(V)$, similaire à $T \mapsto \mathcal{F}_V(T)$.

Lemme 3. — *On suppose $d \equiv 0 \bmod 4\mathbb{Z}$. Soit $T \in \mathcal{S}'(V)^{\bar{G}_X, \chi}$. Supposons T et $\hat{T}$ à support dans $Q(X)$. Alors $T = 0$.*

Pour démontrer cette assertion, on doit se débarrasser de l'hypothèse sur d. On définit le sous-groupe $\underline{G} \subset \tilde{G}$ formé des $(g, \varepsilon) \in \tilde{G}$ tels que $\text{dét}(g) = \varepsilon^d$. Remarquons que $\underline{G} = \bar{G}$ si $d \equiv 0 \bmod 4\mathbb{Z}$. Le lemme se généralise sous la forme

Lemme 4. — *Soit $T \in \mathcal{S}'(V)^{\underline{G}_X, \chi}$. Supposons T et $\hat{T}$ à support dans $Q(X)$. Alors $T = 0$.*

Démonstration. — Le lemme 6.3 de [**1**] reste valable, en remarquant que, pour des décompositions $V = V_1 \oplus V_2$, $X = X_1 \oplus X_2$, si $(g_1, -1) \in \underline{G}_{1,X_1}$ et $(g_2, -1) \in \underline{G}_{2,X_2}$ (avec des notations évidentes), alors $(g_1 g_2, -1)$ appartient à $\underline{G}_X$. Cela nous ramène au cas où le couple (V, X) est de l'un des types suivants.

1^{er} cas. d est impair, V est muni d'une base $(e_i)_{i=1,\dots,d}$, avec $< e_i, e_j >= \nu(-1)^i \delta_{i,d+1-j}$ où ν est un élément non nul de F, $Xe_i = e_{i-1}$ pour $i \geq 2$, $Xe_1 = 0$. On décompose $V = V_1 \oplus V_0 \oplus V_2$, où V_1 est engendré par les e_i pour $i \leq (d-1)/2$, V_0 est la droite portée par $e_{(d+1)/2}$ et V_2 est engendré par les e_i pour $i \geq (d+3)/2$. Introduisons l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(V) & \to & \mathcal{S}(V_0) \\ f & \mapsto & f_0 \end{array}$$

définie par

$$f_0(v_0) = \int_{V_1} f(v_1 + v_0) dv_1.$$

Dans [**1**] paragraphe 6, les auteurs prouvent qu'il existe $R \in \mathcal{S}'(V_0)$ telle que $T(f) = R(f_0)$ pour tout $f \in \mathcal{S}(V)$. Il y a un élément $a \in G^0$, appartenant au tore diagonal (c'est-à-dire conservant chaque droite Fe_i), tel que $aXa^{-1} = -X$. Posons $g = -a$. On a $(g, -1) \in \underline{G}_X$. Faisons agir trivialement cet élément sur V_0. L'application ci-dessus est alors équivariante pour l'action de $(g, -1)$. Donc T est invariante par cet élément, ce qui entraîne $T = 0$.

2^e cas. $d \equiv 0 \bmod 4\mathbb{Z}$, V est muni d'une base $(e_i)_{i=1,\dots,d/2} \cup (f_i)_{i=1,\dots,d/2}$, chaque sous-famille engendrant des lagrangiens, on a $< e_i, f_j >= (-1)^i \delta_{i,d/2+1-i}$, $Xe_i = e_{i-1}$, $Xf_i = f_{i-1}$ pour $i \geq 2$ et $Xe_1 = Xf_1 = 0$. On décompose $V = V_1 \oplus V_2$, où V_1 est engendré par les e_i et f_i pour $i \leq d/4$ et V_2 est engendré par les e_i et f_i pour