317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(970) *Systèmes pluricanoniques sur les variétés de type général*

Olivier DEBARRE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2006
59e année, 2006-2007, n° 970, p. 119 à 140

SYSTÈMES PLURICANONIQUES SUR LES VARIÉTÉS DE TYPE GÉNÉRAL [d'après Hacon–McKernan, Takayama, Tsuji]

par **Olivier DEBARRE**

INTRODUCTION

Un des premiers objets intrinsèquement attachés à une variété[1] projective lisse X est son *fibré* (en droites) *canonique* ω_X, défini comme le déterminant de son fibré cotangent. Pour tout entier m, on note $P_m(X)$ (le m-ième *plurigenre*) la dimension de l'espace vectoriel des sections (holomorphes) globales du fibré en droites $\omega_X^{\otimes m}$ et on définit un invariant numérique de X, appelé sa *dimension de Kodaira,* en posant

$$\kappa(X) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{\log P_m(X)}{\log m}.$$

Si n est la dimension de X, on a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \dots, n\}$. On dit que X est *de type général* si $\kappa(X) = n$. Comme leur nom l'indique, les variétés de type général sont très répandues : une courbe projective lisse est de type général si et seulement si son genre est $\geqslant 2$; une hypersurface (lisse) de $\mathbf{P}^{n+1}$ définie par une équation homogène de degré d est de type général lorsque $d \geqslant n+3$ (sa dimension de Kodaira est 0 pour $d = n+2$ et $-\infty$ pour $d \leqslant n+1$).

Le choix d'une base de l'espace vectoriel des sections globales de $\omega_X^{\otimes m}$ permet de définir une application rationnelle

$$\varphi_{m,X} : X \dashrightarrow \mathbf{P}^{P_m(X)-1}$$

dont on sait montrer, si X est de type général, qu'elle est génériquement injective pour tout entier m assez grand. Le but de cet exposé est de montrer le résultat suivant.

Théorème 0.1 (Hacon–McKernan, Takayama, Tsuji). — *Pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un entier m_n tel que l'application rationnelle $\varphi_{m,X}$ soit génériquement injective*

[1] Nous travaillons sur le corps des complexes et toutes nos variétés et sous-variétés sont irréductibles.

pour toute variété projective lisse de type général X de dimension n et tout entier $m \geqslant m_n$.

Comme Maehara le montre dans [**14**], cela entraîne la conjecture suivante de Severi–Iitaka.

Corollaire 0.2. — *Une variété X étant fixée, il n'y a qu'un nombre* fini *de classes d'équivalence birationnelle de variétés de type général qui sont images de X par une application rationnelle.*

Pour les courbes, on peut prendre $m_1 = 3$ (cela résulte du théorème de Riemann–Roch). Pour les surfaces, on peut prendre $m_2 = 5$ ([**3**]). Pour les variétés de dimension 3, on peut prendre $m_3 = 18(2^9 \cdot 3^7)!$ ([**21**]) et on a en tout état de cause $m_3 \geqslant 27$ ([**9**]).

En dimension 2, la démonstration s'appuie de façon essentielle sur l'existence d'un modèle minimal (c'est-à-dire pour lequel le fibré canonique est *nef*[2]) lisse. En dimension supérieure, le résultat était déjà connu (avec une constante m_n effective) pour les variétés de type général dont le fibré canonique est nef, grâce aux travaux de Demailly, Angehrn–Siu, Kollár et Tsuji sur la conjecture de Fujita (*cf.* cor. 3.2). Le Programme du Modèle Minimal de Mori prédit l'existence d'un modèle minimal pour toutes les variétés de type général, dont des démonstrations viennent d'ailleurs d'être proposées par Birkar, Cascini, Hacon et M^c^Kernan d'une part ([**2**]) et Siu d'autre part ([**19**]). Cependant, les singularités de ce modèle empêchent d'obtenir notre résultat à partir du cas nef.

Il existe deux démonstrations, publiées simultanément, du th. 0.1, toutes deux basées sur des idées de Tsuji ([**22**], [**23**]) : celle de Hacon et McKernan ([**8**]) et celle de Takayama ([**20**]). Aucune ne donne de valeur explicite pour m_n.

La stratégie de Tsuji est, brièvement, la suivante (la terminologie est définie dans le texte). Grâce au théorème d'annulation de Nadel (th. 2.1), il suffit, étant donnés deux points très généraux x_1 et x_2 de X, de produire un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif numériquement équivalent à un multiple positif du diviseur canonique K_X et dont le lieu non klt contient x_1 comme point isolé, et x_2. Il est facile de produire un diviseur dont le lieu non klt contient x_1 et x_2 ; on cherche ensuite à diminuer la dimension d'une composante V de ce lieu contenant x_1. Comme x_1 est très général, V est de type général et par récurrence sur la dimension, on peut trouver un diviseur convenable sur V.

Tout le problème est de relever ce diviseur à X. Lorsque K_X est nef, c'est simplement le théorème d'annulation de Serre (c'est la stratégie qui mène au th. 3.1), mais

[2] Cela signifie que son degré sur toute courbe est positif.

en général, on a besoin d'un énoncé d'extension de formes pluricanoniques de V à X. Lorsque V est un diviseur, de tels énoncés existaient déjà dans la littérature, tous plus ou moins issus de [**17**], et à la fois Hacon–McKernan et Takayama démontrent d'abord un résultat de ce type (th. 6.1). Pour traiter le cas général, on éclate V dans X et on se ramène au cas précédent en comparant les formes pluricanoniques sur V aux formes pluricanoniques sur l'éclaté. Takayama utilise pour cela des résultats de Kawamata sur la positivité de certaines images directes, tandis que Hacon et McKernan utilisent un résultat de Campana généralisant des résultats de positivité analogues de Viehweg. Cet exposé suit la preuve de Takayama, sauf à cet endroit où nous préférons utiliser le résultat de Campana. On obtient ainsi l'injectivité générique de $\varphi_{m,X}$ dès que m est plus grand qu'un entier qui dépend de n et du *volume* de K_X. Si ce volume est grand, on en déduit le théorème ; s'il est petit, X appartient à une famille limitée de variétés et l'existence de m_n est claire (c'est ici que l'on perd l'effectivité).

Je remercie pour leur aide à la préparation de cet exposé Arnaud Beauville, Laurent Bonavero, Frédéric Campana, Stéphane Druel, Gianluca Pacienza, Mihai Păun, Shigeharu Takayama et Eckart Viehweg, ainsi que tous les participants aux groupes de travail de Strasbourg et du Kleebach.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. Diviseurs grands et volume

Soit L un diviseur de Cartier sur une variété projective X de dimension n, c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients entiers d'hypersurfaces de X qui peut être définie localement par une seule équation (on permettra parfois des coefficients rationnels, et on parlera alors de $\mathbf{Q}$-diviseur). On note $\mathscr{O}_X(L)$ le fibré en droites sur X associé à L, puis $H^0(X,L)$ l'espace vectoriel de ses sections globales et $h^0(X,L)$ sa dimension.

On désigne par $\equiv$ l'équivalence linéaire entre diviseurs de Cartier (qui signifie que les fibrés en droites associés sont isomorphes). Pour des $\mathbf{Q}$-diviseurs de Cartier D et D' sur X, on note $D \equiv_{\mathbf{Q}} D'$ s'il existe un entier $q \neq 0$ pour lequel les $\mathbf{Q}$-diviseurs qD et qD' sont entiers et linéairement équivalents, et $D \sim D'$ si D et D' sont numériquement équivalents, c'est-à-dire que leur degré sur toute courbe de X est le même.

On appelle *volume* de L le réel positif

$$\operatorname{vol}(L) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{h^0(X, mL)}{m^n/n!}$$

(c'est en fait une limite). Pour tout entier positif q, on a $\operatorname{vol}(qL) = q^n \operatorname{vol}(L)$, ce qui permet de définir le volume d'un $\mathbf{Q}$-diviseur D en posant $\operatorname{vol}(D) = q^{-n} \operatorname{vol}(qD)$, où

q est un entier > 0 quelconque tel que qD soit un diviseur (entier). Le volume d'un $\mathbf{Q}$-diviseur est invariant par image inverse par un morphisme birationnel. Si D est *nef* (*cf.* note 2), on a $\operatorname{vol}(D) = D^n$ (théorème de Riemann–Roch), où D^n désigne le produit d'intersection $\overbrace{D \cdot \ldots \cdot D}^{n \text{ fois}}$ (3). Le volume d'un diviseur (entier) nef est donc un nombre entier, mais on sait construire des diviseurs de volume irrationnel.

On dit que D est *grand* (« big » en anglais) si $\operatorname{vol}(D) > 0$. Tout $\mathbf{Q}$-diviseur ample est grand (et nef), mais la notion est plus souple : l'image inverse d'un $\mathbf{Q}$-diviseur grand par un morphisme génériquement fini entre variétés projectives est encore un $\mathbf{Q}$-diviseur grand. Un $\mathbf{Q}$-diviseur est grand si et seulement si c'est la somme d'un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et d'un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif (lemme de Kodaira). Si L est un diviseur grand, l'application rationnelle

$$\varphi_{|mL|} : X \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(X, mL)^*$$

définie par les sections globales de $\mathscr{O}_X(mL)$ est génériquement injective pour tout entier $m \gg 0$.

Lorsque X est de plus *lisse*, on désigne par K_X tout diviseur sur X vérifiant $\omega_X = \mathscr{O}_X(K_X)$ (il est donc défini à équivalence linéaire près). Comme expliqué dans l'introduction, X est de type général si et seulement si K_X est grand, et l'application $\varphi_{m,X}$ de cette introduction est $\varphi_{|mK_X|}$. Plus généralement, une variété projective est de type général si une désingularisation l'est (elles le sont alors toutes).

Donnons à titre d'exemple un corollaire du th. 0.1 qui fait intervenir la notion de volume.

Corollaire 1.1. — *Pour toute variété projective lisse de type général X de dimension n, on a* $\operatorname{vol}(K_X) \geqslant m_n^{-n}$.

Preuve — Si $\mu : X' \to X$ est une désingularisation de l'éclatement de l'idéal du lieu de base(4) du système linéaire $|m_n K_X|$, on a une décomposition $\mu^*(m_n K_X) \equiv M + F$,

(3) D'un point de vue topologique, pour un diviseur *entier* L, c'est le cup-produit

$$\overbrace{c_1(\mathscr{O}_X(L)) \smile \cdots \smile c_1(\mathscr{O}_X(L))}^{n \text{ fois}} \in H^{2n}(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}.$$

(4) On appelle *lieu de base* d'un système linéaire $|T|$ sur une variété X l'intersection schématique

$$\operatorname{Base}(|T|) = \textstyle\bigcap_{L \in |T|} L.$$

On note $\mathfrak{b}(|T|) \subset \mathscr{O}_X$ le faisceau d'idéaux associé. Si $\mu : X' \to X$ est une désingularisation de l'éclatement de $\mathfrak{b}(|T|)$, on a une décomposition $\mu^*(|T|) = |M| + F$ en somme d'une partie sans point base (donc nef) $|M|$ et d'une partie fixe (effective) F. On a $\mathfrak{b}(|T|) = \mu_* \mathscr{O}_{X'}(-F)$ et la composée $\varphi_{|T|} \circ \mu$ est le *morphisme* $\varphi_{|M|}$.