317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(971) *Groupes engendrés par les automates*

Andrzej ŻUK

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2006
59^e année, 2006-2007, n^o 971, p. 141 à 174

GROUPES ENGENDRÉS PAR LES AUTOMATES

par **Andrzej ŻUK**

INTRODUCTION

La classe des groupes d'automates contient plusieurs groupes infinis de type fini remarquables. Leur étude a permis de résoudre des problèmes importants de théorie des groupes. Des applications récentes s'étendent à l'algèbre, la géométrie, l'analyse et les probabilités.

Avec les groupes arithmétiques [**24**] et hyperboliques [**19**], les groupes d'automates dominent actuellement notre vision de la théorie des groupes infinis.

Les groupes présentés dans ce texte pourraient être rassemblés sous d'autres noms, comme groupes branchés ou groupes auto-similaires (les définitions précises de ces deux classes sont données plus loin). Nous avons choisi le nom « groupes d'automates » pour souligner l'importance de cette construction, qui produit des groupes aux propriétés intéressantes.

Comme exemples d'application de cette théorie, nous avons choisi les problèmes suivants.

- Problème de Burnside. Groupes infinis de type fini de torsion.
- Problème de Milnor. Constructions de groupes à croissance intermédiaire.
- Problème d'Atiyah. Calculs de nombres de Betti L^2.
- Problème de Day. Nouveaux exemples de groupes moyennables.
- Problème de Gromov. Groupes sans croissance uniforme.

Pour chacun d'entre eux, nous avons choisi les premiers exemples historiques de groupes d'automates considérés pour résoudre ces problèmes. Il s'agit du groupe d'Aleshin, du groupe d'allumeur de réverbères (qui peut être engendré par un automate à deux états), du groupe de Wilson et d'un groupe engendré par un automate à trois états.

Nous avons le sentiment que la classe des groupes d'automates est très riche et qu'on est loin d'une compréhension complète de ces groupes qui défient souvent notre intuition.

Nous espérons que cette introduction au monde des groupes engendrés par les automates pourrait stimuler les développements futurs.

1. GROUPES D'AUTOMATES

1.1. Définition du groupe engendré par un automate

Les automates qui nous intéressent sont finis, inversibles, avec le même alphabet à l'entrée et à la sortie, disons $D = \{0, 1, \ldots, d-1\}$ pour un certain entier $d > 1$. À un tel automate A sont associés un ensemble fini d'états Q, une fonction de transition $\phi : Q \times D \to Q$ et une fonction de sortie : $\psi : Q \times D \to D$; l'automate A est caractérisé par le quadruplet (D, Q, ϕ, ψ).

L'automate A est dit inversible si, pour chaque $q \in Q$, la fonction $\psi(q, \cdot) : D \to D$ est une bijection. Dans ce cas, $\psi(q, \cdot)$ peut être identifiée avec l'élément correspondant σ_q du groupe symétrique S_d sur $d = |D|$ symboles.

Il existe un moyen convenable de représenter un automate fini par un graphe marqué $\Gamma(A)$ dont les sommets correspondent aux éléments de Q. Deux états $q, s \in Q$ sont liés par une arête orientée étiquetée par $i \in D$ si $\phi(q, i) = s$; chaque sommet $q \in Q$ est étiqueté par l'élément correspondant σ_q du groupe symétrique.

Les automates que l'on vient de définir sont les automates non initiaux. Pour les rendre initiaux, on doit pointer un état $q \in Q$ comme état initial. L'automate initial $A_q = (D, Q, \phi, \psi, q)$ agit à droite sur les suites finies et infinies sur D de la manière suivante. Pour chaque symbole $x \in D$, l'automate donne immédiatement la sortie $y = \psi(q, x)$ et change son état initial en $\phi(q, x)$.

En joignant la sortie de A_q avec l'entrée d'un autre automate $B_s = (S, \alpha, \beta, s)$, on obtient une application qui correspond à un automate appelé la composition de A_q et B_s et désigné par $A_q \star B_s$.

Cet automate est formellement décrit comme l'automate dont l'ensemble des états est $Q \times S$ et les fonctions de transition et de sortie Φ, Ψ sont définies par

$$\Phi((x, y), i) = (\phi(x, i), \alpha(y, \psi(x, i))),$$

$$\Psi((x, y), i) = \beta(y, \psi(x, i))$$

et avec l'état initial (q, s).

La composition $A \star B$ de deux automates non initiaux est définie par les mêmes formules pour les fonctions d'entrée et de sortie mais sans indiquer l'état initial.

Deux automates initiaux sont dits équivalents s'ils déterminent la même application sur l'ensemble des états. Il existe un algorithme pour minimiser le nombre d'états.

L'automate qui produit l'application identité sur l'ensemble des suites est appelé trivial. Si A est un automate inversible, alors pour chaque état q l'automate A_q admet un automate inverse A_q^{-1} tel que $A_q \star A_q^{-1}$, $A_q^{-1} \star A_q$ soient équivalents à l'automate trivial. L'automate inverse peut formellement être décrit comme l'automate $(Q, \widetilde{\phi}, \widetilde{\psi}, q)$ où $\widetilde{\phi}(s,i) = \phi(s, \sigma_s(i))$, $\widetilde{\psi}(s,i) = \sigma_s^{-1}(i)$ pour $s \in Q$. Les classes d'équivalence d'automates finis inversibles sur un alphabet D constituent un groupe qui est appelé le groupe des automates finis ; il dépend de D. Chaque ensemble d'automates initiaux engendre un sous-groupe de ce groupe.

Soit maintenant A un automate inversible non initial. Soit $Q = \{q_1, \ldots, q_t\}$ l'ensemble des états de A et soit $A_{q_1}, \ldots, A_{q_t}$ l'ensemble des automates initiaux que l'on peut obtenir à partir de A. Le groupe $G(A) = \langle A_{q_1}, \ldots, A_{q_t} \rangle$ est appelé le groupe déterminé ou engendré par A.

1.2. Groupes d'automates et produits en couronne

Il existe une relation entre les groupes d'automates et les produits en couronne. Pour un groupe de la forme $G(A)$, on a l'interprétation suivante.

Soit $q \in Q$ un état de A et soit $\sigma_q \in S_d$ la permutation associée à cet état. Pour chaque symbole $i \in D$, on note $A_{q,i}$ l'automate initial ayant pour état initial $\phi(q,i)$ (alors $A_{q,i}$ pour $i = 0, 1, \ldots, d-1$ parcourt l'ensemble des automates initiaux qui sont les voisins de A_q, i.e. tels que le graphe $\Gamma(A)$ admette une arête de A_q à $A_{q,i}$).

Soient G et F des groupes de type fini tels que F soit un groupe de permutations d'un ensemble X (nous nous intéressons au cas où F est le groupe symétrique S_d et X est l'ensemble $\{0, 1, \ldots, d-1\}$). On définit le produit en couronne $G \wr F$ de ces groupes comme suit. Les éléments de $G \wr F$ sont les couples (g, γ) où $g : X \to G$ est une fonction telle que $g(x)$ soit différente de l'élément neutre de G, noté Id, seulement pour un nombre fini d'éléments x de X, et où γ est un élément de F. La multiplication dans $G \wr F$ est définie par :

$$(g_1, \gamma_1)(g_2, \gamma_2) = (g_3, \gamma_1\gamma_2)$$

où

$$g_3(x) = g_1(x) g_2(\gamma_1^{-1}(x)) \quad \text{pour } x \in X.$$

On écrira les éléments du groupe $G \wr S_d$ sous la forme $(a_0, \ldots, a_{d-1})\sigma$, où $a_0, \ldots, a_{d-1} \in G$ et $\sigma \in S_d$.

Le groupe $G = G(A)$ admet un plongement dans le produit en couronne $G \wr S_d$ via l'application

$$A_q \to (A_{q,0}, \ldots, A_{q,d-1})\sigma_q,$$

où $q \in Q$. L'expression à droite est appelée décomposition en couronne de A. On écrira ainsi dans le texte $A_q = (A_{q,0}, \ldots, A_{q,d-1})\sigma_q$.

Pour simplifier, on note a le générateur A_a du groupe engendré par l'automate A.

1.3. Action sur un arbre

Les suites finies sur l'alphabet $D = \{0, \ldots, d-1\}$ sont en bijection avec les sommets d'un arbre enraciné T_d de degré d (dont la racine correspond à la suite vide).

Un automate initial A_q agit sur les suites sur D et agit aussi sur T_d par automorphismes. Ainsi pour chaque groupe engendré par un automate, en particulier pour un groupe de forme $G(A)$, il existe une action canonique correspondante sur un arbre (pour la théorie des actions sur les arbres sans racine, voir **[30]**).

Soit maintenant G un groupe agissant sur un arbre enraciné T. Le bord ∂T, constitué des rayons géodésiques infinis issus de la racine, admet une topologie naturelle qui le rend homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

L'action de G sur T induit une action sur ∂T par homéomorphismes et admet une mesure canonique invariante μ sur ∂T qui est la mesure de Bernoulli sur $D^{\mathbb{N}}$ donnée par la distribution $\{\frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d}\}$.

Il existe un moyen canonique d'associer une représentation unitaire à un système dynamique muni d'une mesure invariante. Dans notre cas, on obtient la représentation régulière π sur $L^2(\partial T, \mu)$, définie par $(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$.

1.4. Projections de stabilisateurs

Pour un groupe $G = G(A)$ agissant par automorphismes sur T, on note $\mathrm{St}_G(n)$ le sous-groupe de G constitué des éléments de G qui agissent trivialement sur le niveau n de l'arbre T. D'une manière analogue, pour un sommet $u \in T$, on note $\mathrm{St}_G(u)$ le sous-groupe de G constitué des éléments fixant u. Le plongement de G dans le produit en couronne $G \wr S_d$ induit un plongement $\phi : \mathrm{St}_G(1) \to G^d$ dans le groupe de base du produit en couronne. Celui-ci définit les projections canoniques $\psi_i : \mathrm{St}_G(1) \to G$ $(i = 1, \ldots, d)$ données par $\psi_i(g) = \phi(g)|_i$ pour $g \in \mathrm{St}_G(1)$.

1.5. Groupes branchés et fractals

Le stabilisateur $\mathrm{St}_G(n)$ du n-ième niveau est l'intersection des stabilisateurs de tous les sommets de ce niveau. Pour tout sommet $u \in T$, on peut définir la projection $\psi_u : \mathrm{St}_G(u) \to G$.

DÉFINITION 1.1. — *Un groupe G est dit fractal si pour chaque sommet u, on a $\psi_u(\mathrm{St}_G(u)) = G$ après identification de l'arbre T avec le sous-arbre T_u issu de la racine u.*