317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(975) *Propriétés qualitatives des solutions des équations de Hamilton-Jacobi*

Jean-Michel ROQUEJOFFRE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2007
59e année, 2006-2007, n° 975, p. 269 à 293

PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI [d'après A. Fathi, A. Siconolfi, P. Bernard]

par **Jean-Michel ROQUEJOFFRE**

Soit $\mathbf{T}^N = \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ le tore unité de $\mathbb{R}^N$, et soit $(x,p) \in \mathbf{T}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto H(x,p) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, uniformément strictement convexe en sa seconde variable, i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que l'inégalité suivante

$$H_{pp}(x,p) \geq \alpha I \tag{1}$$

soit vraie au sens des formes quadratiques. Cette fonction H sera dans tout l'exposé désignée sous le nom de « hamiltonien ». Considérons l'équation de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x, Du) = 0 \ (t > 0,\ x \in \mathbf{T}^N) \tag{2}$$

où $Du = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_N} u)$. On s'intéresse d'abord au problème de Cauchy pour (2), c'est-à-dire qu'on complète (2) par la donnée initiale

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{3}$$

où u_0 est continue sur $\mathbf{T}^N$. On s'intéresse ensuite à une version stationnaire de (2), à savoir l'équation

$$H(x, Du) = c, \quad x \in \mathbf{T}^N. \tag{4}$$

Il est bien connu que, pour une donnée initiale u_0 régulière sur $\mathbf{T}^N$, le problème de Cauchy (2)-(3) admet une solution régulière *locale*, à savoir qu'il existe $t(u_0) > 0$ tel que l'équation (2) admette une solution $u(t,x)$ de classe C^1 sur $[0, t(u_0)] \times \mathbf{T}^N$ vérifiant $u(0,.) = u_0$. Toutefois, cette solution n'est pas globale : il est en général impossible de la prolonger jusqu'à $t = +\infty$. D'autre part, si nous relâchons la contrainte : u de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{T}^N$, pour la remplacer par : u lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{T}^N$ – et donc (2)-(3) a lieu presque partout, il y a en général plusieurs solutions globales. Voir par exemple **[18]** pour ces questions. Une question naturelle est donc de savoir si un critère supplémentaire moins contraignant que la régularité C^1, mais plus fort que la régularité Lipschitz, permet de sélectionner une unique solution globale au problème de Cauchy.

Ces considérations ont motivé l'introduction par Crandall et Lions [**10**], au début des années 1980, des *solutions de viscosité.* Cette notion permet de sélectionner, parmi toutes les solutions de (2), « celle qui a un sens physique » – avec toutes les ambiguïtés que peut comporter un tel vocable ! La théorie des solutions de viscosité a par la suite connu des développements spectaculaires, dépassant très largement le cadre des équations de Hamilton-Jacobi du type (2) : citons, sans prétendre à l'exhaustivité, les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman du premier ordre avec leurs applications en contrôle optimal et en finance, les équations elliptiques et paraboliques du second ordre, les équations géométriques (eikonales, courbure moyenne...), l'homogénéisation ; en parallèle avec ces développements théoriques, des méthodes nouvelles d'approximation numérique pour ces problèmes sont apparues, liées aux applications. Faire ici un panorama exhaustif de tous ces développements serait absolument vain ; c'est pourquoi nous nous contentons de mentionner les ouvrages de Barles [**1**] et Lions [**18**] pour les équations du premier ordre, la monographie de Caffarelli-Cabré [**7**] pour les équations elliptiques du second ordre, et l'article de revue de Crandall-Ishii-Lions [**9**] pour un exposé des résultats principaux de la théorie des solutions de viscosité pour les équations du second ordre dégénérées.

Revenons aux équations (2)-(3) et (4). La motivation de cet exposé est l'étude des propriétés qualitatives, principalement de régularité et d'unicité, des solutions de (2)-(4) et (4). En effet, la théorie générale dit que les solutions de viscosité de (2)-(3) sont lipschitziennes, et il serait intéressant de connaître la régularité maximale, ou bien si la solution est plus régulière en certains endroits. D'autre part, si le problème de Cauchy admet une solution unique – c'est l'un des premiers résultats de la théorie de Crandall-Lions – le problème stationnaire n'a aucune raison d'admettre une solution unique ; on souhaite donc compter et classifier les solutions de (4).

La solution de (2)-(3) admet une expression – presque – explicite (formule de Lax-Oleinik). A la fin des années 1990, A. Fathi, dans quatre notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [**12**], [**11**], [**13**], [**14**], a montré comment l'exploitation systématique de cette formule, combinée à des idées empruntées à la théorie de Mather – voir, par exemple, [**20**] – pouvait jeter un éclairage nouveau sur les propriétés qualitatives de (2)-(3) et (4). Les idées présentes dans ces quatre notes ont été développées dans [**15**], et aboutissent à l'important théorème d'existence de sous-solutions critiques C^1, présenté dans Fathi-Siconolfi [**16**]. Ce résultat permet de comprendre comment s'organisent les solutions de (4), et a des conséquences sur la dynamique des solutions du système hamiltonien sous-jacent.

Les travaux de Fathi ont eu d'importantes applications à une classe de problèmes d'optimisation appelée « transport optimal ». Utilisant les idées de Fathi, B. Buffoni et P. Bernard [**6**], [**5**] ont donné une solution générale du problème de Monge, généralisant des travaux antérieurs de Evans-Gangbo, Caffarelli-Feldman-McCann, Ambrosio... Toutefois, pour éviter que le texte ne prenne des proportions démesurées, ni ces applications, ni la théorie de Mather ne seront discutées ici.

Cet exposé se veut une introduction, à peu près auto-contenue, au théorème de Fathi-Siconolfi et à son impact sur les propriétés qualitatives des équations de Hamilton-Jacobi. La première section de ce texte est une introduction aux solutions de viscosité, aboutissant à un théorème d'existence (Lions, Papanicolaou, Varardhan) pour (4). La deuxième section introduit la formule de Lax-Oleinik comme solution explicite du problème de Cauchy pour (2)-(3), et en dégage les principales propriétés. Ces deux premières sections ne sont en aucun cas originales ; leur seul mérite est de synthétiser en quelques pages deux types de résultats différents pour (2)-(3). La courte section 3 présente de façon très simple des propriétés de régularité $C^{1,1}$, cruciales pour la suite. La section 4 analyse le théorème de Fathi-Siconolfi, et la section 5 en présente plusieurs applications et compléments : ensembles d'unicité pour l'équation stationnaire (4), existence de régions invariantes pour le système hamiltonien sous-jacent, régularité additionnelle.

Remarque 0.1. — Dans tout l'exposé, on pourrait remplacer le tore $\mathbf{T}^N$ par une variété riemanienne compacte sans bord. Toutefois ceci n'apporterait rien à la compréhension du texte et ne ferait qu'alourdir les calculs présentés.

Je souhaite remercier ici P. Bernard, A. Fathi et A. Siconolfi pour de nombreuses discussions et leur patience vis-à-vis de mes diverses questions à la limite de la naïveté. Je tiens à adresser une mention spéciale à G. Barles, qui est à l'origine d'une grande partie de ce que je sais de la théorie des solutions de viscosité.

1. SOLUTIONS DE VISCOSITÉ

Nous donnons dans cette section les notions de base sur les solutions de viscosité d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, et démontrons un résutat d'unicité typique de la théorie. Ce dernier permet d'arriver rapidement à la démonstration du théorème d'existence de solutions stationnaires de Lions-Papanicolaou-Varadhan, et des questions d'unicité qu'il soulève.

1.1. Généralités

Nous commençons avec des équations plus générales que (2) ; nous restreindrons les hypothèses au fur et à mesure. Considérons le problème de Cauchy

$$u_t + F(x, u, Du) = 0 \ (t > 0,\ x \in \mathbf{T}^N), \qquad u(0, x) = u_0(x), \tag{5}$$

où $F \in C(\mathbf{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, et où la donnée initiale u_0 est continue sur $\mathbf{T}^N$.

Définition 1.1. — *Nous dirons que* $u(t,x) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbf{T}^N)$ *est sous-solution de viscosité pour* (5) *si, pour toute fonction* $\phi \in C^1((0,+\infty)\times\mathbf{T}^N)$ *et pour tout couple* $(t_0,x_0) \in (0,+\infty)\times\mathbf{T}^N$ *tel que* (t_0,x_0) *soit un point de maximum pour* $u-\phi$*, on a :*

$$\phi_t(t_0,x_0) + F(x_0, u(t_0,x_0), D\phi(t_0,x_0)) \leq 0. \tag{6}$$

Nous dirons que $u(t,x)$ *est sur-solution de viscosité pour* (5) *si, pour toute fonction* $\phi \in C^1((0,+\infty)\times\mathbf{T}^N)$ *et pour tout couple* $(t_0,x_0) \in (0,+\infty)\times\mathbf{T}^N$ *tel que* (t_0,x_0) *soit un point de minimum pour* $u-\phi$*, on a :*

$$\phi_t(t_0,x_0) + F(x_0, u(t_0,x_0), D\phi(t_0,x_0)) \geq 0. \tag{7}$$

Nous dirons enfin que $u(t,x)$ *est solution de viscosité pour* (5) *si elle est à la fois sous- et sur-solution de viscosité pour* (5).

Remarque 1.2. — Une solution C^1 de (5) est solution de viscosité. Le maximum de deux sous-solutions de viscosité est solution de viscosité, le minimum de deux sur-solutions de viscosité est sur-solution de viscosité. La définition 1.1 s'étend trivialement aux équations stationnaires du type $F(x,u,Du)=0$ sur $\mathbf{T}^N$.

Le lecteur peut à juste titre se demander si une définition apparemment aussi faible a un quelconque pouvoir sélectif. Il se trouve que oui, et nous donnons ci-après, sans démonstration, la liste des principales propriétés des solutions de viscosité de (5).

1. (Stabilité) Soit $(F_n)_n$ une suite de $C(\mathbf{T}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, convergeant localement uniformément vers $F \in C(\mathbf{T}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Soit u_n une solution de viscosité de (5) avec $F=F_n$; supposons la suite $(u_n)_n$ localement uniformément convergente vers $u \in C(\mathbb{R}_+,\mathbf{T}^N)$. Alors u est solution de viscosité de (5).
2. Soit u une solution de viscosité de (5) localement lipschitzienne. Alors elle vérifie (5) presque partout.
3. (Principe du maximum) Supposons que le hamiltonien $F(x,u,p)$ soit de la forme $H(x,p)$, où $H \in C(\mathbf{T}^N\times\mathbb{R}^N)$ vérifie la propriété suivante (dite de coercivité) :

$$\lim_{|p|\to+\infty} H(x,p) = +\infty, \quad \text{uniformément en } x \in \mathbf{T}^N. \tag{8}$$

   Soient $u_{10} \leq u_{20}$ deux données initiales continues pour (5), et supposons que u_{10} (resp. u_{20}) génère au moins une solution de viscosité u_1 (resp. u_2) pour (5). Alors $u_1 \leq u_2$. Ce principe du maximum est vrai pour des hamiltoniens plus généraux, mais c'est hors du propos de ces notes.
4. (Contraction faible) Toujours si le hamiltonien est de la forme $F(x,u,p) = H(x,p)$ et sous l'hypothèse de coercivité (8), soient $u_{10} \leq u_{20}$ deux données initiales continues pour (5). Supposons que u_{10} (resp. u_{20}) génère au moins une solution de viscosité u_1 (resp. u_2) pour (5). Alors $\|u_1(t,.)-u_2(t,.)\|_\infty \leq \|u_{10}-u_{20}\|_\infty$.