317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(976) *Variétés carquois de Nakajima*

Olivier SCHIFFMANN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2007
59e année, 2006-2007, n° 976, p. 295 à 344

VARIÉTÉS CARQUOIS DE NAKAJIMA
[d'après Nakajima, Lusztig, Varagnolo, Vasserot, Crawley-Boevey, ...]

par **Olivier SCHIFFMANN**

1. INTRODUCTION

Les variétés de Nakajima trouvent leurs origines au début des années 90 dans la construction d'espaces de modules de connexions anti-autoduales – les *espaces de modules d'instantons* – sur certaines classes de variétés réelles hyperkählériennes de dimension quatre – les *espaces ALE* – cf. [**1**], [**40**], [**41**]. Pour un bon choix de structure complexe dans la famille hyperkählérienne, ces espaces s'identifient à des espaces de modules de fibrés holomorphes sur les résolutions minimales $\widetilde{\mathbb{C}^2 /\!/ \Gamma}$ des singularités de Klein (ou plutôt sur leur compactification naturelle). Via la correspondance de McKay [**19**], elle-même basée sur une observation remarquable de McKay, ces derniers espaces de modules admettent une description explicite comme quotient hyperkählérien d'un certain espace de représentations d'un carquois de type affine ($A_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ ou $E_{6,7,8}^{(1)}$).

Ce modèle explicite a permis à Nakajima de construire, sur l'homologie de ces « variétés de carquois », une action de l'algèbre de Kac-Moody affine $\widehat{\mathfrak{g}}$ – de même type $A_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ ou $E_{6,7,8}^{(1)}$ – par convolution par certaines correspondances bien choisies. On obtient ainsi une représentation intégrable de plus haut poids de $\mathfrak{g}$. Ce pont entre la géométrie des espaces de modules d'instantons d'un côté et la théorie des représentations des algèbres de Kac-Moody affines de l'autre est très utile pour les deux parties prenantes : il permet de relier les nombres de Betti à certains caractères de représentations de $\widehat{\mathfrak{g}}$, de construire des symétries relevant, au niveau des espaces de modules, l'action du groupe de Weyl, etc. ; il permet aussi de réaliser géométriquement certains invariants fins des représentations de $\widehat{\mathfrak{g}}$, comme le cristal de Kashiwara (cf. Section 6.).

La définition de ces « variétés de carquois de Nakajima » se généralise sans difficulté à *n'importe quel carquois* Q. On obtient ainsi une famille de triplets $(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}), \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w}), \pi)$ où $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une variété algébrique symplectique lisse, $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une variété algébrique affine (en général singulière) et où $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est un morphisme propre (cf. [**59**]). Ici $\mathbf{v},\mathbf{w}$ sont deux vecteurs de dimensions (arbitraires) pour Q. Les constructions géométriques de représentations mentionnées plus haut s'étendent aussi à ce cadre général [**61**] et on obtient ainsi des représentations d'algèbres de Kac-Moody (symétriques) arbitraires. Même si, comme expliqué plus haut, la motivation initiale est d'ordre purement géométrique (voire même de géométrie différentielle), ce travail trouve naturellement sa place dans la continuité de ceux de Ringel [**71**] et Lusztig [**45**] sur les groupes quantiques et les carquois.

Il apparaît très clairement que le triplet $(\mathfrak{M}(\mathbf{w}),\mathfrak{M}_0(\mathbf{w}),\pi)$ (où on a posé $\mathfrak{M}(\mathbf{w}) = \bigsqcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ et $\mathfrak{M}_0(\mathbf{w}) = \bigcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$) est un analogue de la désingularisation de Springer $T^*\mathscr{B} \to \mathscr{N}$ du cône nilpotent d'une algèbre de Lie simple $\mathbb{C}$ par le fibré cotangent de sa variété drapeaux $\mathscr{B}$. La construction de Nakajima de représentations intégrables d'algèbres de Kac-Moody s'apparente ainsi à la construction de Springer de représentations de groupes de Weyl dans l'homologie des fibres de Springer. Par un théorème fameux dû à Kazhdan-Lusztig [**38**] et, indépendamment, à Ginzburg [**16**], on réalise la correspondance de Deligne-Langlands en construisant toutes les représentations irréductibles de dimension finie d'une algèbre de Hecke affine dans la K-théorie des fibres de Springer ; Nakajima a obtenu dans [**63**] un résultat similaire : les représentations irréductibles des algèbres affines quantiques se réalisent dans la K-théorie des fibres de l'application $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{w})$. On en déduit une formule de caractère pour ces représentations irréductibles faisant intervenir une nouvelle classe de polynômes, quelque peu semblables aux polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Il existe néanmoins quelques différences notables avec la désingularisation de Springer. Par exemple, les variétés $\mathfrak{M}(\mathbf{w})$ ont plusieurs composantes connexes (celles-ci sont reliées entre elles par la structure de cristal de Kashiwara). De plus, les variétés carquois sont définies pour toutes les algèbres de Kac-Moody alors que les constructions de variété drapeaux et de résolutions de Springer pour les groupes de Kac-Moody sont beaucoup plus délicates. Notons enfin qu'il existe un autre modèle géométrique pour les représentations d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, basé, lui, sur la grassmanienne affine $\mathscr{G}r$ de $\mathfrak{g}$ (cf. e.g. [**54**]). Le problème, qui nous paraît important, de comprendre le lien unissant ce modèle avec celui des variétés de Nakajima est encore largement ouvert (cf. [**55**] en type A).

Le plan de cet exposé est le suivant. Les sections 2 et 3 sont consacrées au schéma de Hilbert de points sur $\mathbb{C}^2$ et aux espaces de modules de fibrés équivariants sur $\mathbb{P}^2$, qui sont des exemples concrets de variétés de Nakajima (associées au carquois de type $A_0^{(1)}$ et aux carquois affines respectivement) et dans lesquels la plupart des phénomènes sont déja présents. Les variétés de Nakajima (pour un carquois général) sont définies dans la section 4. Les constructions de Nakajima de représentations en homologie et en

K-théorie sont le sujet des sections 5 et 7 respectivement. La section 6 est dédiée aux propriétés de fibrations des variétés carquois et à la structure de cristal de Kashiwara dont on peut munir l'ensemble de ses composantes irréductibles. La dernière section se veut un pointeur vers quelques-uns des développements plus récents ; le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans les nombreux autres survols du sujet [**64**], [**69**], ...

Remerciements.— L'auteur remercie chaleureusement P. Baumann, D. Hernandez, H. Nakajima et É. Vasserot pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

2. SCHÉMA DE HILBERT DE POINTS DE $\mathbb{C}^2$

2.1. Définition

Soit $n \geq 1$ un entier et soit $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas de dimension zéro et de longueur n de $\mathbb{C}^2$. À un tel sous-schéma $Z \subset \mathbb{C}^2$, on peut associer son anneau de fonctions régulières A_Z et son idéal de définition I_Z

$$0 \longrightarrow I_Z \longrightarrow \mathbb{C}[x,y] \longrightarrow A_Z \longrightarrow 0$$

et, ensemblistement, on a

$$(\mathbb{C}^2)^{[n]} = \big\{ I \text{ idéal de } \mathbb{C}[x,y] \mid \dim \mathbb{C}[x,y]/I = n \big\}.$$

On sait depuis Grothendieck que $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ peut être muni d'une structure de variété algébrique. De plus, $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ est lisse (car $\mathbb{C}^2$ est une surface, [**13**]), irréductible, de dimension $2n$, et l'application *de Hilbert-Chow*

$$\pi : (\mathbb{C}^2)^{[n]} \to S^n\mathbb{C}^2$$

qui associe à un sous-schéma Z son support (compté avec multiplicité) est une résolution de singularités. En d'autres termes, π est un morphisme propre qui se restreint en un isomorphisme

$$\pi : \pi^{-1}(S^n_{(1^n)}\mathbb{C}^2) \xrightarrow{\sim} S^n_{(1^n)}\mathbb{C}^2$$

où

$$S^n_{(1^n)}\mathbb{C}^2 = \big\{ (z_1, \ldots, z_n) \in S^n\mathbb{C}^2 \mid z_i \neq z_j \text{ pour } i \neq j \big\}$$

est le lieu lisse de $S^n\mathbb{C}^2$. La fibre exceptionnelle la plus intéressante est $(\mathbb{C}^2)^{[n]}_0 := \pi^{-1}((0,0,\ldots,0))$, appelée schéma de Hilbert *ponctuel*.

2.2. Description de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ à l'aide de carquois

Nous allons donner une interprétation algébrique du triplet $\big((\mathbb{C}^2)^{[n]}, S^n\mathbb{C}^2, \pi\big)$ en termes d'espaces de modules de représentation d'un carquois très simple. À un idéal I de $\mathbb{C}[x,y]$ de codimension n, associons le quadruplet (V, B_1, B_2, v) avec

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{C}[x,y]/I, \\ v &= 1 \in V, \\ B_1 &\in \mathrm{End}(V), u \mapsto xu, \\ B_2 &\in \mathrm{End}(V), u \mapsto yu. \end{aligned}$$

On voit aisément que

i) $[B_1, B_2] = 0$,
ii) le vecteur v engendre tout V sous l'action de B_1 et B_2.

Inversement, tout quadruplet (V, B_1, B_2, v) avec dim $V = n$ satisfaisant à i) et ii) provient d'un unique idéal $I \subset \mathbb{C}[x,y]$ défini par

$$I = \big\{f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(B_1, B_2) \cdot v = 0\big\}.$$

Enfin, deux quadruplets (V, B_1, B_2, v) et (V', B_1', B_2', v') déterminent le même idéal I si et seulement si il existe $g : V \xrightarrow{\sim} V'$ pour lequel $gv = v'$, $gB_1g^{-1} = B_1'$ et $gB_2g^{-1} = B_2'$. En d'autres termes, et toujours ensemblistement, $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ s'identifie au quotient

$$\left\{ (B_1, B_2, v) \in (\mathrm{End}\, \mathbb{C}^n)^2 \times \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{c} [B_1, B_2] = 0 \\ v \text{ engendre } \mathbb{C}^n \text{ sous } B_1, B_2 \end{array} \right\} / GL_n(\mathbb{C}). \tag{2.1}$$

Exemple 2.1. Voyons comment la structure de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ se reflète dans le modèle (2.1). Étant donné que B_1 et B_2 commutent, il sont simultanément trigonalisables. Soit $E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de trigonalisation ; notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, resp. $\mu_1, \ldots, \mu_n$, les coefficients diagonaux de B_1 et B_2 dans E. Si $(\lambda_i, \mu_i) \neq (\lambda_j, \mu_j)$ pour $i \neq j$, on voit facilement que B_1 et B_2 sont simultanément diagonalisables. Ceci correspond aux points de l'ouvert

$$\{Z = \{z_1, \cdots, z_n\} \mid z_i \neq z_j \text{ pour } i \neq j\} \subset (\mathbb{C}^2)^{[n]}.$$

En général, le morphisme de Hilbert-Chow associe à la $GL_n(\mathbb{C})$-orbite du triplet (B_1, B_2, v) le point

$$\pi\left(GL_n(\mathbb{C}) \cdot (B_1, B_2, v)\right) = ((\lambda_1, \mu_1), \ldots, (\lambda_n, \mu_n)) \in S^n\mathbb{C}^2.$$