317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(979) *Points rationnels sur les sous-variétés des variétés abéliennes*

David HARARI

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2007
59e année, 2006-2007, n° 979, p. 415 à 440

POINTS RATIONNELS SUR LES SOUS-VARIÉTÉS DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES AU-DESSUS D'UN CORPS DE FONCTIONS [d'après Poonen et Voloch]

par **David HARARI**

Introduction

Les travaux **[20]** de B. Poonen et J.F. Voloch dont nous allons parler dans cet exposé concernent les points rationnels de certaines variétés algébriques sur le corps de fonctions d'une courbe, c'est-à-dire sur un corps K extension finie d'un corps $k(t)$ (où k est un corps de base fixé). Bien que la plupart de leurs résultats s'appliquent à des corps k assez généraux, ils sont particulièrement significatifs quand k est un corps fini. On verra du reste que certains de leurs arguments sont spécifiques à la caractéristique positive.

Il est bien connu que les corps de nombres (i.e. les extensions finies du corps $\mathbf{Q}$ des rationnels) et les corps de fonctions d'une courbe sur un corps fini ont des propriétés très similaires. Le problème résolu par Poonen et Voloch trouve son origine dans une question concernant les courbes sur les corps de nombres (posée indépendamment par Scharaschkin et Skorobogatov vers 1998), que nous allons maintenant décrire.

Soit X une courbe algébrique (non singulière) projective définie sur un corps de nombres K, par exemple une courbe plane donnée dans $\mathbf{P}^2$ par une équation polynomiale $P(x, y, t) = 0$ (homogène de degré d). Supposons X de genre au moins 2 (pour une courbe plane, cela équivaut à $d \geq 4$). On sait depuis 1983 que X n'a qu'un nombre fini de points rationnels (conjecture de Mordell, démontrée par Faltings), autrement dit l'équation ci-dessus n'a qu'un nombre fini de solutions non triviales à coordonnées dans K (à une constante multiplicative près). Mais comment déterminer si l'ensemble $X(K)$ des points rationnels de X est non vide ?

Première constatation : une condition nécessaire pour avoir $X(K) \neq \varnothing$ est que, pour tout complété K_v de K (relativement à ses différentes places, i.e. ses différentes classes d'équivalence de valeurs absolues), l'ensemble $X(K_v)$ des K_v-points de X soit non vide. Par exemple pour $K = \mathbf{Q}$, les complétés sont les corps p-adiques $\mathbf{Q}_p$ ($\mathbf{Q}_p$ est le complété de $\mathbf{Q}$ pour la valeur absolue $|\ x\ |_p = p^{-v_p(x)}$, où $v_p(x)$ est la valuation p-adique de x) et le corps $\mathbf{R}$ des réels. Si X est donnée par une équation polynomiale homogène, il s'agit donc de vérifier que cette équation a au moins une solution non triviale dans chaque complété K_v. Il se trouve que ce type de conditions est en pratique facile à vérifier, grâce au lemme de Hensel et aux estimées de Lang-Weil (cf. [**19**], paragraphe 1.2.)

Malheureusement ces conditions (dites locales) sont en général insuffisantes pour garantir l'existence d'un point rationnel (cela marche dans des cas particuliers comme les quadriques, théorème de Hasse-Minkowski) : par exemple la courbe de Cassels $x^4 + y^4 - (241)^2 t^4 = 0$ n'a pas de point rationnel, bien qu'elle ait des points réels et sur tous les $\mathbf{Q}_p$ (on trouvera d'autres exemples explicites dans [**29**], et des situations analogues en dimension supérieure dans [**19**]).

Soit J la *jacobienne* de X, qui est une variété abélienne (c'est-à-dire un groupe algébrique connexe et projectif) de dimension g. Il se trouve que l'ensemble $X(K)$ est mieux compris quand la courbe X est plongée dans J ; un tel plongement existe dès que X possède un *zéro-cycle de degré* 1, i.e. des points dans des extensions de K de degrés premiers entre eux dans leur ensemble.

Notons Ω l'ensemble de toutes les places de K. On pose, pour toute K-variété projective V :

$$V(\mathbf{A}_K) = \prod_{v \in \Omega} V(K_v).$$

C'est l'*espace adélique* de V que l'on munit de la topologie produit des topologies v-adiques. On note alors $\overline{V(K)}$ l'adhérence de $V(K)$ dans $V(\mathbf{A}_K)$: ainsi une famille de points locaux $(P_v)_{v \in \Omega}$ sur V est dans $\overline{V(K)}$ si et seulement si, pour tout ensemble fini de places S de K, il existe un point rationnel de V arbitrairement proche de P_v pour v dans S.

La question initiale (Q1) de Scharaschkin ([**24**]) et Skorobogatov portait sur *l'obstruction de Manin* à l'existence d'un point rationnel sur X. Nous reviendrons sur cet aspect dans la dernière partie de ce texte. Comme l'énoncé précis de (Q1) est un peu technique, nous allons essentiellement nous intéresser à la question suivante (Scharaschkin et Skorobogatov ont montré que (Q1) s'y ramenait) :

(Q2) *Soit X une courbe de genre au moins deux plongée dans sa jacobienne J. A-t-on $X(K) = X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)}$?*

(Bien entendu l'inclusion $\subset$ est évidente). Quand le groupe de Mordell-Weil $J(K)$ de J est fini, on a $\overline{J(K)} = J(K)$, d'où une réponse positive à (Q2). Mais en général, la question ci-dessus reste très largement ouverte. On trouvera des conjectures du même style dans l'article de M. Stoll [**31**], avec notamment de nombreux liens entre l'obstruction de Brauer-Manin et les revêtements non ramifiés de la courbe X. On verra du reste que certains résultats de [**20**] sont des analogues naturels d'énoncés démontrés ou conjecturés dans [**31**] dans le cadre des corps de nombres, bien que leur démonstration dans le contexte des corps de fonctions fasse souvent intervenir des méthodes spécifiques à la caractéristique p.

Le but principal de l'article de Poonen et Voloch est de montrer que lorsque l'on se place sur un corps de fonctions, l'analogue de (Q2) admet (sous des hypothèses peu restrictives) une réponse positive dans le cadre plus général des sous-variétés des variétés abéliennes. Dans la section suivante, nous allons énoncer leurs résultats en détail.

1. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

1.1. Notations et conventions

Soit k un corps (dans tout ce texte, « corps » signifie corps commutatif). On considère un corps K de type fini et de degré de transcendance 1 sur k, et on suppose que k est algébriquement fermé dans K ; ainsi K est le corps des fonctions d'une courbe C (qu'on peut supposer projective et régulière) géométriquement irréductible sur k. On considère l'ensemble Ω de toutes les places de K/k, c'est-à-dire des classes d'équivalence de valeurs absolues non triviales de K qui sont triviales sur k. Ainsi Ω correspond à toutes les valuations discrètes données par les points fermés de C. Pour $v \in \Omega$, on note K_v le complété de K en v, $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v, et $\mathbf{F}_v$ son corps résiduel (qui est une extension finie de k). On fixe des clôtures algébriques respectives $\bar{k}$, $\overline{K}$ de k et K, avec $\bar{k} \subset \overline{K}$. On note K^s la clôture séparable de K dans $\overline{K}$.

Pour toute K-variété projective V, on notera $V(\mathbf{A}_K) := \prod_{v\in\Omega} V(K_v)$ l'ensemble de ses *points adéliques*. Il est muni de la topologie produit des topologies v-adiques et on notera $\overline{V(K)}$ l'adhérence de $V(K)$ dans $V(\mathbf{A}_K)$. Si maintenant V est une variété sur un corps F et F' est une extension de F, on note $X_{F'} = X \times_F F'$ la F'-variété obtenue par extension des scalaires de F à F'. Une K-variété V est dite *isotriviale* (resp. constante) s'il existe une $\bar{k}$-variété (resp. une k-variété) W telle que $V_{\overline{K}}$ (resp. V) soit isomorphe à $W_{\overline{K}}$ (resp. W_K). Un sous-K-schéma fermé X d'une K-variété abélienne J est dit *sans cossette* si $X_{\overline{K}}$ ne contient aucun translaté de sous-variété abélienne non nulle de $J_{\overline{K}}$.

Si M est un groupe abélien et n un entier naturel, on note $M[n] = \{x \in M, nx = 0\}$ le sous-groupe de n-torsion de M et $M_{\text{tors}} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} M[n]$ son sous-groupe de torsion. Si p est un nombre premier, on note $M[p^\infty] = \bigcup_{r\geq 0} M[p^r]$ le sous-groupe de torsion p-primaire de M. Pour tout groupe abélien profini G, on note $G^{(p)}$ son pro-p-quotient maximal (on a donc $G = \prod_p G^{(p)}$). Pour tout corps F de caractéristique p, on note F^{p^n} le sous-corps de F constitué des x^{p^n} pour $x \in F$, et on pose $F^{p^\infty} = \bigcap_{n\geq 1} F^{p^n}$.

1.2. Les principaux résultats

La conjecture la plus générale concernant « l'intersection adélique » pour une sous-variété fermée d'une variété abélienne est la suivante :

CONJECTURE 1.1 (Poonen/Voloch). — *Soient J une variété abélienne sur K et X un sous-K-schéma fermé de J. Alors :*

$$\overline{X(K)} = X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)}.$$

Notons que, sans hypothèse supplémentaire, on ne peut pas remplacer ici $\overline{X(K)}$ par $X(K)$, même si X est une courbe de genre au moins deux : il y a des contre-exemples avec une courbe constante plongée dans sa jacobienne ([**20**], remarque 1.3.). Ceci dit, on va voir qu'on a $X(K) = \overline{X(K)}$ dans toutes les situations considérées par Poonen et Voloch, qui nécessitent du reste des conditions assez peu restrictives.

Le premier cas est le suivant :

THÉORÈME 1.2 (Poonen/Voloch). — *Supposons le corps k de caractéristique zéro. Alors $X(K) = X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)}$ pour tout sous-K-schéma fermé X d'une K-variété abélienne J.*

Comme on le verra, ce cas est relativement simple car on a en fait $\overline{J(K)} = J(K)$ dès que k est de caractéristique zéro. Beaucoup plus difficile est le théorème suivant, qui répond positivement dans de nombreux cas à l'analogue de la question (Q2) :

THÉORÈME 1.3 (Poonen/Voloch). — *Supposons k de caractéristique $p > 0$. Soit J une K-variété abélienne telle que $J_{\overline{K}}$ n'ait aucun quotient isotrivial non nul, et telle que $J(K^s)[p^\infty]$ soit fini. Soit X un sous-K-schéma fermé sans cossette de J. Alors $X(K) = X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)}$.*

Remarque 1.4. — Au lieu de considérer l'ensemble Ω de toutes les places, on peut travailler avec un sous-ensemble Ω_1 de Ω dont le complémentaire est fini ; on obtient les mêmes énoncés en remplaçant $X(\mathbf{A}_K)$ par $X(A_K^{\Omega_1}) := \prod_{v \in \Omega_1} X(K_v)$ et $\overline{J(K)}$ par l'adhérence de $J(K)$ dans $\prod_{v \in \Omega_1} J(K_v)$. Comme les preuves sont exactement les mêmes, nous nous limiterons à l'énoncé concernant $\mathbf{A}_K$ pour ne pas trop alourdir les notations.

Remarque 1.5. — Si $J_{\overline{K}}$ n'a pas de quotient isotrivial non nul et X est sans cossette, alors $X(K)$ est fini ([**11**], théorème 1.1 ; l'analogue sur les corps de nombres est un théorème classique de Faltings). De ce fait, si la conjecture 1.1 est vraie, l'hypothèse $J(K^s)[p^\infty]$ fini est inutile dans le théorème précédent. Notons que, d'après [**33**], on a $J(K^s)[p^\infty] = 0$ dans le cas « générique » où J est ordinaire telle que la classe de Kodaira-Spencer de J/K soit de rang maximal. Il faut aussi remarquer que cette