317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(980) *La conjecture de Kashiwara-Vergne*

Charles TOROSSIAN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2007
59e année, 2006-2007, n° 980, p. 441 à 465

LA CONJECTURE DE KASHIWARA-VERGNE
[d'après Alekseev et Meinrenken]

par **Charles TOROSSIAN**

INTRODUCTION

En 1978, M. Kashiwara et M. Vergne ont conjecturé dans [**16**] une propriété remarquable et universelle sur la série de Campbell-Hausdorff d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension finie. Cette propriété conjecturale admet comme corollaire l'isomorphisme de Duflo entre le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et les invariants de l'algèbre symétrique. Cette conjecture a été démontrée en toute généralité par A. Alekseev et E. Meinrenken en 2005 et publiée en 2006 à Inventiones [**5**].

Ce texte se décompose de la façon suivante : on rappelle dans un premier temps des résultats élémentaires sur la formule de Campbell-Hausdorff et la symétrisation. On introduit ensuite la conjecture de Kashiwara-Vergne, en expliquant ses origines et ses conséquences. La troisième section est consacrée à la preuve d'Alekseev et Meinrenken. On a résumé, dans l'appendice, la construction de Kontsevich pour la quantification des crochets de Lie qu'il nous a semblé nécessaire de rappeler pour une bonne compréhension du texte.

Je remercie A. Alekseev, B. Keller, D. Manchon, F. Rouvière et M. Vergne pour leurs commentaires, suggestions et améliorations lors de la relecture de ce texte.

1. FORMULE DE CAMPBELL-HAUSDORFF ET SYMÉTRISATION

1.1. La formule de Campbell-Hausdorff

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème de Lie, il existe un groupe de Lie réel G, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et une application exponentielle notée $\exp_{\mathfrak{g}}$ qui définit un difféomorphisme local en $0 \in \mathfrak{g}$ sur G.

Il en résulte que l'on peut lire la loi de groupe de G en coordonnées exponentielles. C'est la fameuse formule de Campbell-Hausdorff. En d'autres termes, pour X, Y proches de 0 dans $\mathfrak{g}$, il existe une série en des polynômes de Lie, convergente et à valeurs dans $\mathfrak{g}$, notée $Z(X,Y)$ telle que l'on ait

$$\exp_{\mathfrak{g}}(X) \cdot_G \exp_{\mathfrak{g}}(Y) = \exp_{\mathfrak{g}}\big(Z(X,Y)\big).$$

Les premiers termes de la série de Campbell-Hausdorff sont bien connus et s'écrivent

$$(1)\quad Z(X,Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + \frac{1}{48}[Y,[X,[Y,X]]] - \frac{1}{48}[X,[Y,[X,Y]]] + \cdots .$$

Il existe de nombreuses expressions de $Z(X,Y)$ en termes de crochets itérés (cf. § 5.1) ou écrites de manière récursive (cf. **[28]** page 118). Une difficulté majeure concernant la formule de Campbell-Hausdorff est qu'il n'existe pas de base de l'algèbre de Lie libre qui soit particulièrement commode pour effectuer des calculs[(1)]. La quantification de Kontsevich donne une autre façon d'écrire la formule de Campbell-Hausdorff comme rappelé en § 4.2.

1.2. Symétrisation et application exponentielle

La symétrisation β est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ notée $S[\mathfrak{g}]$ et l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ notée $U(\mathfrak{g})$; c'est une version du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. La symétrisation commute à l'action adjointe (resp. aux dérivations ad$X$) et vérifie la condition, pour $X \in \mathfrak{g}$,

$$\beta(X^n) = X^n.$$

On en déduit la formule, pour $X_i \in \mathfrak{g}$,

$$\beta(X_1 \cdots X_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)}.$$

Il existe plusieurs façons de voir l'algèbre $S[\mathfrak{g}]$; comme algèbre symétrique, comme algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$, comme algèbre des opérateurs différentiels invariants par translation sur $\mathfrak{g}$ (i.e. à coefficients constants) et enfin comme algèbre pour la convolution des distributions de support 0. On peut voir $U(\mathfrak{g})$ comme l'algèbre enveloppante universelle, l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G et enfin l'algèbre pour la convolution des distributions supportées par l'origine de G.

(1) Les bases de Hall, par exemple sont définies de manière récursive. Par ailleurs il existe une base qui permet d'écrire la formule de Campbell-Hausdorff en utilisant des combinaisons à coefficients complexes **[18]**.

La formule de Taylor énonce que l'on a l'égalité de distributions formelles $e^X = \delta_X$, avec δ_X la masse de Dirac au point X. On a donc dans une complétion adéquate de $U(\mathfrak{g})$:

$$\beta(\delta_X) = \beta(e^X) = \sum_{n\geq 0} \frac{X^n}{n!} = \delta_{\exp_{\mathfrak{g}}(X)}, \tag{2}$$

où $\delta_{\exp_{\mathfrak{g}}(X)}$ est la distribution ponctuelle au point $\exp_{\mathfrak{g}}(X)$ dans G.
La symétrisation envoie donc la distribution δ_X sur la distribution $\delta_{\exp_{\mathfrak{g}}(X)}$; c'est donc l'application exponentielle au niveau des distributions, car on a $(\exp_{\mathfrak{g}})_*(\delta_X) = \delta_{\exp_{\mathfrak{g}}(X)}$.

On peut ramener, via l'application β, le produit de $U(\mathfrak{g})$, en un produit associatif dans $S[\mathfrak{g}]$. C'est l'étoile produit de Gutt(2) **[14]**, réalisant la quantification par déformation de l'algèbre de Poisson $S[\mathfrak{g}]$. On a donc pour w, v dans $S[\mathfrak{g}]$

$$w \underset{Gutt}{\star} v := \beta^{-1}(\beta(w)\beta(v)). \tag{3}$$

Comme distribution de support 0, on aura donc

Lemme 1.1. — *Pour w, v des éléments de $S[\mathfrak{g}]$, $\beta^{-1}(\beta(w)\beta(v))$ correspond à la distribution de support $0 \in \mathfrak{g}$ définie pour f, fonction test sur $\mathfrak{g}$, par la formule :*

$$\langle\, \beta^{-1}(\beta(w)\beta(v)), f\,\rangle := \langle\, w(X)\otimes v(Y), f(Z(X,Y))\,\rangle.$$

1.3. Le centre de l'algèbre enveloppante et l'isomorphisme de Duflo

Comme la symétrisation β commute aux dérivations, c'est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ sur $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (les invariants pour l'action adjointe).

Dans **[13]**, en utilisant les idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante, Duflo montre que, pour *toute algèbre de Lie* de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle, $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ et $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sont isomorphes *comme algèbres* et exhibe un isomorphisme. Ce résultat généralise celui de Dixmier **[11]** dans le cas nilpotent, de Duflo dans le cas résoluble **[12]** et d'Harish-Chandra **[15]** dans le cas semi-simple et s'inscrit dans l'esprit de la méthode des orbites initiée par Kirillov.

On notera par $j(X)$ le déterminant jacobien de la fonction $\exp_{\mathfrak{g}}$ (cf. § 5.2), à savoir la fonction définie par

$$j(X) = \det{}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}\right) = \exp\left(-\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\frac{\mathrm{ad}X}{2}\right)\det{}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\sinh(\mathrm{ad}\frac{X}{2})}{\frac{\mathrm{ad}X}{2}}\right). \tag{4}$$

Cette fonction va intervenir de manière cruciale dans la suite.

Notons $S[[\mathfrak{g}^\star]]$ l'algèbre des séries formelles en les éléments de $\mathfrak{g}^*$. La série formelle $j^{\frac{1}{2}}$ est donc dans $S[[\mathfrak{g}^\star]]$. C'est donc un opérateur différentiel sur $\mathfrak{g}^*$ d'ordre

(2) C'est-à-dire que l'étoile produit s'exprime comme une série formelle d'opérateurs bi-différentiels sur $\mathfrak{g}^*$ à coefficients polynomiaux.

infini à coefficients constants que l'on note $j^{\frac{1}{2}}(\partial)$. La formule de Duflo s'écrit alors, pour $P \in S[\mathfrak{g}]$,

$$\gamma(P) := \beta\left(j^{\frac{1}{2}}(\partial)P\right). \tag{5}$$

C'est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels de $S[\mathfrak{g}]$ sur $U(\mathfrak{g})$, qui commute aux dérivations ad$X$.

THÉORÈME 1.2 ([**13**]). — *L'application γ ci-dessus est un isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ sur $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.*

Ce théorème est non trivial. Dans [**19**], Kontsevich montre par un argument d'homotopie que $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ et $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sont isomorphes *comme algèbres* et en déduit qu'il s'agit de l'isomorphisme de Duflo(3) ; ce résultat s'étend automatiquement aux super-algèbres de Lie et Kontsevich montre que les algèbres de cohomologie $H(\mathfrak{g}, S[\mathfrak{g}])$ et $H(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$ sont isomorphes(4). Dans [**21**] on vérifie qu'il s'agit encore de la formule de Duflo étendue à la cohomologie(5). On dispose donc d'une démonstration qui n'utilise pas la théorie des représentations.

Afin d'étendre l'isomorphisme de Duflo aux germes de distributions invariantes, Kashiwara et Vergne suggèrent dans [**16**] une méthode basée sur une déformation de la formule de Campbell-Hausdorff. Ces techniques sont connues aujourd'hui sous le vocable « méthode de Kashiwara-Vergne ». En quelque sorte on cherche à lire l'isomorphisme de Duflo sur la formule de Campbell-Hausdorff.

2. LA CONJECTURE COMBINATOIRE DE KASHIWARA-VERGNE

2.1. Notations

Soient $(e_i)_{i=1,\dots,d}$ une base de $\mathfrak{g}$, $(e_i^*)_{i=1,\dots,d}$ la base duale et $X = \sum_{i=1}^d x_i e_i$. Pour $X \mapsto A(X)$ une fonction régulière de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire un champ de vecteurs sur $\mathfrak{g}$), on désigne le champ adjoint associé par

$$[X, A(X)] \cdot \partial_X = \sum_{i=1}^d \langle\, e_i^*, [X, A(X)]\,\rangle \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{6}$$

On note aussi $\partial_X A$ la différentielle de A en X ; c'est une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$.

(3) L'argument utilise la forme a priori de l'isomorphisme obtenu comparé à celui de Duflo.
(4) En degré 0 on retrouve les algèbres d'invariants $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ et $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.
(5) Ce résultat est aussi cité dans [**26**] comme un travail en commun avec Kontsevich, mais non publié.