317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(981) *Géométrie des espaces de modules de courbes et de surfaces $K3$*

Claire VOISIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2007
59e année, 2006-2007, n° 981, p. 467 à 490

GÉOMÉTRIE DES ESPACES DE MODULES DE COURBES ET DE SURFACES $K3$ [d'après Gritsenko-Hulek-Sankaran, Farkas-Popa, Mukai, Verra, ...]

par **Claire VOISIN**

INTRODUCTION

Si X est une variété algébrique lisse, complète ou non, on peut considérer (sur un corps de caractéristique 0, qui ici sera $\mathbb{C}$) une complétion lisse $\overline{X}$ et étudier les sections du fibré canonique $K_{\overline{X}}$, et plus généralement des puissances $K_{\overline{X}}^{\otimes m}$, $m > 0$. Lorsque X est singulière, on introduit une désingularisation X^s de X, et on étudie de même les sections du fibré canonique d'une complétion lisse $\overline{X^s}$ de X^s. Ces espaces de sections sont des invariants birationnels de $\overline{X^s}$, et en particulier ne dépendent que de X.

Définition 0.1. — *On dit que X est de type général si l'application rationnelle de $\overline{X^s}$ dans un espace projectif fournie par les sections $K_{\overline{X^s}}^{\otimes m}$, pour m suffisamment grand, est birationnelle de $\overline{X^s}$ sur son image.*

La classification birationnelle introduit plus généralement la dimension de Kodaira $\kappa(X)$, qui est la dimension de l'image de l'application ci-dessus pour m suffisamment grand et suffisamment divisible. À l'extrême opposé des variétés de type général, on trouve donc les variétés de dimension de Kodaira négative (ou $-\infty$), c'est-à-dire pour lesquelles aucune des puissances $K_{\overline{X}}^{\otimes m}$, $m > 0$, n'admet de section non nulle.

Conjecturalement, ces dernières variétés sont les variétés *uniréglées*, qui sont balayées par des courbes rationnelles. Un grand progrès est fait dans cette direction dans [**11**]. Des exemples particuliers de variétés uniréglées sont donnés par les variétés *unirationnelles*, c'est-à-dire celles qui admettent un morphisme rationnel dominant

$$\mathbb{P}^N \overset{\Phi}{\dashrightarrow} X.$$

Ces variétés sont non seulement uniréglées mais aussi *rationnellement connexes* (cf. [**16**]). Il n'y a aucune conjecture caractérisant les variétés unirationnelles. Il est probable qu'il existe des variétés rationnellement connexes qui ne sont pas unirationnelles, mais aucun exemple n'est connu.

La propriété d'unirationalité est évidemment d'une importance majeure pour les espaces de modules de variétés algébriques d'un type donné. Elle dit en effet qu'on dispose d'un paramétrage qui, le plus souvent, consiste en un algorithme pour construire les objets considérés. Notons que les espaces de modules de variétés algébriques ou de paires sont définis sur $\mathbb{Q}$ et que, s'ils sont unirationnels, ils le sont alors sur un corps de nombres K, de sorte que les K-points sont alors denses au sens de Zariski dans l'espace de modules considéré.

À l'inverse, il est conjecturé par Lang que, pour une variété de type général définie sur un corps de nombres, les L-points de cette variété ne sont Zariski–denses pour aucune extension finie L de ce corps. Ainsi, la propriété « de type général » pour un espace de modules de variétés d'un certain type entraîne conjecturalement que les variétés de ce type définies sur un corps de nombres donné ne sont pas génériques !

Le but de cet exposé est de discuter ces deux propriétés extrêmes (type général et unirationalité) pour les espaces de modules de courbes et de surfaces $K3$ polarisées. Rappelons [**7**] qu'une surface $K3$ est une surface complexe compacte S d'irrégularité $q := \dim H^0(S, \Omega_S)$ nulle, et satisfaisant $K_S \cong \mathcal{O}_S$. L'exemple le plus simple de telles surfaces est donné par les hypersurfaces lisses de degré 4 dans $\mathbb{P}^3$. Par des arguments simples de théorie des déformations (cf. [**1**]), on peut montrer qu'une surface $K3$ est une (petite) déformation d'une telle surface quartique. En particulier, elles ont toutes la même topologie et sont entre autres simplement connexes. De plus le réseau $H^2(S, \mathbb{Z})$ muni de sa forme d'intersection naturelle est un réseau pair (par la formule de Wu, c'est une conséquence du fait que K_X est trivial), isomorphe à $3U \oplus 2E_8^-$, où U est le réseau hyperbolique unimodulaire de rang 2 et E_8^- est le réseau E_8 muni de l'opposé de sa forme quadratique standard. En utilisant cet argument d'approximation, on voit apparaître un phénomène troublant : toute surface $K3$ est kählérienne, et on peut construire (cf. [**6**]) un assez bon espace de modules de surfaces $K3$ marquées, c'est-à-dire munies d'un isomorphisme

$$(H^2(S, \mathbb{Z}), \langle , \rangle) \cong 3U \oplus 2E_8^-,$$

mais il n'existe pas de bon espace de modules de surfaces $K3$ kählériennes. On est confronté tout d'abord au fait que l'espace de modules précédent n'est pas séparé, à cause du phénomène décrit par Atiyah [**4**] de non-unicité de la résolution simultanée des points doubles. Par ailleurs, le groupe des automorphismes d'une surface $K3$ peut être infini, de sorte qu'oublier le marquage, c'est-à-dire quotienter l'espace de modules ci-dessus par la relation donnée par les automorphismes des surfaces $K3$ n'est pas réellement faisable. Ceci explique également pourquoi les surfaces $K3$ quartiques, pour lesquelles on dispose d'un bon espace de modules (cf. [**43**]), peuvent être denses parmi les surfaces $K3$ générales.

Il est donc nécessaire de se restreindre aux espaces de modules de surfaces $K3$ polarisées, c'est-à-dire munies d'un fibré en droites ample $\mathscr{L}$. Un tel fibré en droites satisfait $c_1(\mathscr{L})^2 = 2g-2$, où g est le genre des courbes lisses $C \in |\mathscr{L}|$. Pour cette raison, on parle de surfaces $K3$ de genre g.

Les espaces de modules que nous considérerons sont

$$\mathscr{F}_g,\ \mathscr{P}_g,\ \mathscr{M}_g,$$

qui paramètrent respectivement les classes d'isomorphisme de surfaces $K3$ munies d'un fibré en droites $\mathscr{L}$ ample primitif (i.e. de classe non divisible dans Pic S) tel que $c_1(\mathscr{L})^2 = 2g-2$, les classes d'isomorphisme de paires (C, S) où $C \subset S$ est une courbe lisse de genre g, et $(S, \mathscr{L} = \mathscr{O}_S(C)) \in \mathscr{F}_g$, et enfin l'espace de modules des courbes lisses de genre g. Il est clair que $\mathscr{P}_g$ admet des morphismes dans $\mathscr{F}_g$ et $\mathscr{M}_g$. Le morphisme $p : \mathscr{P}_g \to \mathscr{F}_g$ réalise $\mathscr{P}_g$ comme un ouvert de Zariski dans le fibré projectif sur $\mathscr{F}_g$ de fibre $\mathbb{P}(H^0(S, \mathscr{L}))$ au-dessus de $(S, \mathscr{L}) \in \mathscr{F}_g$. Le morphisme $q : \mathscr{P}_g \to \mathscr{M}_g$ envoie la paire (C, S) sur la classe d'isomorphisme de la courbe C.

Les résultats évoqués dans ce texte sont de trois types : en petit genre, l'unirationalité de $\mathscr{F}_g$ et $\mathscr{M}_g$ est connue, et plus précisément, des résultats récents de Mukai établissent l'unirationalité de $\mathscr{F}_g$ pour $g \leq 13$, tandis que Verra montre l'unirationalité de $\mathscr{M}_{14}$ (cf. sections 3.1, 3.2). Nous évoquerons également l'utilisation récente de $\mathscr{P}_g$ par Farkas et Popa pour étudier les diviseurs effectifs de $\mathscr{M}_g$. Les constructions plus anciennes de diviseurs dans $\mathscr{M}_g$ étaient dues à Eisenbud et Harris [**18**], dans le but de simplifier et améliorer le résultat de Harris et Mumford montrant que $\mathscr{M}_g$ est de type général pour g suffisamment grand, et faisaient intervenir la théorie de Brill-Noether. La conclusion de Farkas et Popa est que les familles de courbes contenues dans des surfaces $K3$ fournissent des informations nouvelles sur le cône effectif de $\mathscr{M}_g$ (cf. section 2.2).

Enfin, la plus grosse partie de l'exposé (section 4) concernera le résultat récent de [**22**] :

Théorème 0.2. — *$\mathscr{F}_g$ est de type général pour $g > 62$ et $g = 47, 51, 55, 58, 59, 61$.*

Les résultats montrés dans [**22**] concernent en fait des espaces plus généraux de la forme $\Gamma\backslash\mathscr{D}_L$, où L est un réseau de signature $(2, n)$ avec $n \geq 9$ (cf. section 4.1). Les méthodes développées utilisent comme dans [**41**], qui montre le résultat analogue pour les variétés abéliennes, l'uniformisation donnée par le théorème de Torelli [**38**], et la théorie des formes automorphes. Elles sont en contraste total avec les méthodes de géométrie algébrique esquissées dans les sections précédentes.

Remerciements. — *Je remercie Valery Gritsenko, Klaus Hulek, Gregory Sankaran et Mihnea Popa pour leurs commentaires, et Jean-Michel Coron pour sa lecture attentive de ce texte et ses corrections.*

1. SECTIONS HYPERPLANES DES SURFACES $K3$

Le genre g étant fixé, l'espace de modules $\mathcal{F}_g$ paramétrant les surfaces $K3$ de genre g est de dimension 19. En fait les déformations d'une telle surface $K3$ sont non obstruées, car $h^2(S,T_S) = h^2(S,\Omega_S) = h^0(S,\Omega_S) = 0$ et $h^0(S,T_S)$ vaut également 0 par dualité de Serre. Donc la famille universelle des déformations de S est lisse de dimension égale à

$$h^1(S,T_S) = h^1(S,\Omega_S) =: h^{1,1}(S) = 20.$$

(Ici on a utilisé l'isomorphisme $T_S \cong \Omega_S$ dû au fait que K_S est trivial. On a également utilisé $b_2(S) = 22$ et $h^{2,0}(S) = 1$ pour conclure que $h^{1,1}(S) = 20$.) Mais les déformations qui préservent la polarisation forment seulement une hypersurface lisse dans cette famille. On a donc $\dim \mathcal{F}_g = 19$. Par ailleurs, soit $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} S$ un fibré inversible ample avec $c_1(\mathcal{L})^2 = 2g-2$. Alors on a

$$h^1(S,\mathcal{L}) = 0 = h^2(S,\mathcal{L})$$

par le théorème d'annulation de Kodaira, et donc

$$h^0(S,\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{L})^2 = g+1,$$

par la formule de Riemann-Roch. Ainsi, la variété $\mathcal{P}_g$ paramétrant les paires constituées d'une surface S polarisée de genre g et d'une courbe C lisse dans le système linéaire $|\mathcal{L}|$ sur S est de dimension $g+19$. Cette variété admet un morphisme évident q à valeurs dans $\mathcal{M}_g$, qui est de dimension $3g-3$.

Or on a $3g-3 > g+19$ dès que $g \geq 12$. On en déduit qu'une courbe générique de genre au moins 12 n'est pas contenue dans une surface $K3$. Il serait tentant de penser qu'inversement, si $g \leq 11$, une courbe générique de genre g est une section hyperplane d'une surface $K3$, mais il se trouve que c'est faux en genre 10. La raison en est due au fait que dans ce cas les fibres de l'application $q : \mathcal{P}_{10} \to \mathcal{M}_{10}$ sont de dimension 3, phénomène découvert et expliqué par Mukai **[31]** (cf. section 3.1 ci-dessous) : les surfaces $K3$ de genre 10 sont des intersections complètes de trois sections hyperplanes d'une variété $X \subset \mathrm{Grass}(2,7)$ de dimension 5, satisfaisant $K_X = \mathcal{O}_X(-3)$, où $\mathcal{O}_X(1)$ est la restriction à X du fibré en droites de Plücker, de sorte qu'une courbe section hyperplane d'une telle surface est en fait l'intersection complète de quatre sections hyperplanes de X, et qu'elle est contenue dans une famille de dimension 3 de telles surfaces $K3$: connaissant $C \subset X$, pour déterminer $S \subset X$ contenant C, il faut