317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

(969) *Livres ouverts en géométrie de contact*

Vincent COLIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2006
59e année, 2006-2007, n° 969, p. 91 à 117

LIVRES OUVERTS EN GÉOMÉTRIE DE CONTACT [d'après Emmanuel Giroux]

par **Vincent COLIN**

1. INTRODUCTION

La géométrie de contact a connu récemment de nombreuses avancées, en interaction avec d'autres branches des mathématiques. Le signal déclencheur de cette évolution a été l'introduction, par Emmanuel Giroux [**32**], d'une nouvelle description des variétés de contact en termes de *livres ouverts.* Brièvement ici, un livre ouvert dans une variété V est la donnée d'une sous-variété K de codimension deux de V à fibré normal trivial, appelée la reliure, et d'une fibration $\theta : V \setminus K \to S^1$ qui est l'application coordonnée angulaire sur un voisinage tubulaire trivialisé de K. Les fibres de θ sont appelées les pages. Les livres ouverts qui représentent les variétés de contact sont d'un type particulier : la reliure est elle-même une variété de contact, les pages sont des variétés de Stein et la monodromie, qui décrit la fibration θ, peut être représentée par un difféomorphisme symplectique de l'une des pages. On considère cette correspondance modulo une opération de stabilisation sur les livres ouverts : le plombage lagrangien positif. En dimension trois, elle devient alors bijective.

En dimension trois, cette description est purement topologique, comme l'est la topologie symplectique en dimension deux. Elle permet de traduire les problèmes de géométrie de contact en questions sur la monodromie du livre ouvert. Giroux donne ainsi une caractérisation des monodromies qui correspondent aux structures de contact holomorphiquement remplissables [**32, 33**] et Honda-Kazez-Matić [**44**] (et le travail précurseur de Goodman [**36**]) de celles qui correspondent aux structures de contact tendues.

Depuis l'exposé [**28**], de nombreux résultats sont venus affiner notre compréhension des structures de contact sur les variétés de dimension trois, dans la lignée de ceux obtenus par Bennequin, Eliashberg et Giroux dans les années 80-90. On en possède une classification complète sur de nombreuses variétés [**30, 31, 40, 41, 42, 43**] et on a découvert une classification grossière générale [**9, 10, 11, 12**] : une variété close orientable et irréductible de dimension trois porte une infinité de structures de contact tendues si et seulement si elle contient un tore π_1-injecté. Tous ces résultats peuvent maintenant se transposer dans le monde des livres ouverts et des difféomorphismes de surfaces. C'est de cette manière que Giroux donne avec Goodman dans [**34**] la réponse à une question de Harer sur la classification des entrelacs fibrés.

À tout livre ouvert portant une structure de contact ξ, on peut associer une classe particulière de *champs de Reeb*, *i.e.* de champs de vecteurs transversaux à ξ et dont le flot préserve ξ : celle des champs de Reeb transversaux aux pages. Ce contrôle de la dynamique permet dans de nombreux cas, par exemple lorsque la monodromie est isotope à un difféomorphisme périodique [**13**], de calculer l'homologie de contact de ξ et de montrer la conjecture de Weinstein : tout champ de Reeb pour une telle structure de contact ξ a une orbite périodique.

Les livres ouverts jouent également, *via* la construction de remplissages symplectiques découverte indépendamment par Eliashberg [**20**] et Etnyre [**23**], un rôle clé dans la démonstration récente de la propriété P des nœuds par Kronheimer et Mrowka [**46**]. Ils interviennent aussi de manière cruciale dans la définition d'une classe de contact en homologie de Heegaard-Floer, par Ozsváth et Szabó [**52**], permettant en retour de nouvelles avancées en géométrie de contact et en topologie [**47**].

En dimension supérieure, la construction de Giroux est de nature différente et s'appuie sur les travaux de Donaldson [**14, 15**], transcrits par Ibort-Martinez-Presas [**45**] de la géométrie symplectique vers la géométrie de contact. Elle permet de formuler la géométrie de contact dans le langage de la géométrie symplectique. Il s'agit là de construire des sections approximativement holomorphes et équitransversales de fibrés en droites hermitiens au-dessus d'une variété de contact (V, ξ). Giroux interprète géométriquement ces sections par l'existence d'un livre ouvert particulier. Cette présentation a permis notamment à Bourgeois de répondre positivement à une question posée par Lutz dans les années 70 [**5**] : tout tore de dimension impaire porte une structure de contact.

Je remercie très vivement Emmanuel Giroux et François Laudenbach pour leur aide lors de la confection de ce document.

2. LIVRES OUVERTS

On note V une variété close (compacte sans bord) et orientée de dimension $2n+1$.

Une *structure de contact* orientée et positive sur V est un champ d'hyperplans ξ, défini globalement comme le noyau d'une 1-forme non singulière α, sujette à la condition $\alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$. Lorsque V et ξ sont orientés, le champ ξ est aussi coorienté.

La forme α est choisie positive sur un vecteur normal direct à ξ ; elle est alors unique à multiplication près par une fonction positive. Dans ce cas, la forme $(d\alpha|_\xi)^n$ donne l'orientation de ξ : la 2-forme $d\alpha|_\xi$ est une forme symplectique positive.

Les structures de contact sont des champs de plans localement homogènes. Tout point de (V,ξ) est inclus dans une *carte de Darboux*, où la structure ξ a pour équation $dz + \Sigma_{i=1}^n p_i dq_i = 0$ dans des coordonnées $(p_1, q_1, ..., p_n, q_n, z) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Si on peut en général envisager des structures de contact non orientées et négatives, on ne considérera dans ce texte que des structures orientées et positives.

Les champs de Reeb associés à une structure de contact ξ sont mis en bijection avec les formes de contact α de noyau ξ par les équations : $i_R\alpha = 1$; $i_R d\alpha = 0$, qui admettent une unique solution. On peut ainsi parler du champ de Reeb *associé* à une forme de contact α.

On note D^2 le disque unité dans le plan, muni des coordonnées polaires $\{(r,\phi)\} \in]0,1] \times S^1$.

DÉFINITION 2.1. — *Un livre ouvert pour V est la donnée d'un couple (K,θ), où :*

- *K est une sous-variété close de V de codimension deux à fibré normal trivial ;*
- *$\theta : V \setminus K \to S^1$ est une fibration égale à $(k,r,\phi) \mapsto \phi$, $k \in K$, $(r,\phi) \in]0,1] \times S^1$, dans un voisinage tubulaire $K \times D^2 \setminus (K \times \{0\})$ de $K \simeq K \times \{0\}$.*

La sous-variété K est appelée la reliure du livre ouvert ; les fibres de θ sont ses pages.

Toute page d'un livre ouvert se compactifie naturellement par ajout de la reliure, c'est pourquoi on considérera parfois par la suite des pages compactes. On peut également voir les livres ouverts de façon constructive. Soient S une variété compacte à bord et h un difféomorphisme de S qui vaut l'identité au bord. On considère la suspension

$$\Sigma(S,h) = S \times [0,1] / \sim_h$$

de h, où $\sim_h$ est la relation d'équivalence $(x,1) \sim_h (h(x),0)$, pour tout $x \in S$. Comme h vaut l'identité sur ∂S, le bord $\partial\Sigma(S,h)$ est canoniquement difféomorphe à $\partial S \times S^1$. La variété

$$V = \overline{\Sigma}(S,h) = \Sigma(S,h) \cup_\partial (\partial S) \times D^2,$$

obtenue par collage du produit $(\partial S) \times D^2$ à $\Sigma(S,h)$ par identification canonique de leurs bords respectifs à $(\partial S) \times S^1$, possède un livre ouvert. La reliure est $K = (\partial S) \times \{0\} \subset (\partial S) \times D^2$, et la fibration θ l'extension de la fibration $\theta_0 : \Sigma(S,h) \to S^1$, $\theta_0(x,t) \mapsto t$, par l'application coordonnée angulaire sur $(\partial S) \times (D^2 \setminus \{0\})$. On dit que $V = \overline{\Sigma}(S,h)$ est la *suspension relative* de (S,h).

Réciproquement, tout livre ouvert (K,θ) sur V est obtenu par une construction similaire. On note $K \times D^2$ un voisinage de K sur lequel la fibration est donnée par l'application coordonnée angulaire. On considère alors un champ de vecteurs X sur V, égal à $r\frac{\partial}{\partial\phi}$ sur $K\times D^2$ et transversal aux fibres de θ. Si S est une fibre de $\theta|_{V\setminus int(K\times D^2)}$, l'application de premier retour sur S donnée en suivant le flot de X est l'identité au bord de S. Elle définit un difféomorphisme h de S, dont la suspension relative s'identifie à V.

Si V est orientée et si (K,θ) est un livre ouvert pour V, la fibration θ détermine une coorientation des pages et donc une orientation des pages et de la reliure. Le lien établi par Giroux entre les structures de contact et les livres ouverts s'exprime à l'aide de la définition suivante.

Définition 2.2. — *Une structure de contact ξ est portée par un livre ouvert (K,θ) si elle est le noyau d'une forme de contact α telle que :*

1) *α donne une forme de contact positive sur K ;*
2) *$d\alpha$ induise une forme symplectique positive sur les pages.*

Une forme de contact α qui vérifie ces deux conditions est dite adaptée à (K,θ). La condition (2) est équivalente à l'existence d'un champ de Reeb positivement transversal aux pages.

Exemple. Sur $S^3=\{r_1^2+r_2^2=1\}\subset\mathbb{C}^2=\{(z_1=r_1e^{i\theta_1},z_2=r_2e^{i\theta_2})\}$, la forme de contact $\alpha=r_1^2d\theta_1+r_2^2d\theta_2$ de noyau ζ_0 est adaptée au livre ouvert $K_0=\{r_2=0\}$, $\theta(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2)=\theta_2$, dont les pages sont des disques.

Elle l'est également au livre ouvert $K_+=\{r_1r_2=0\}$, $\theta_+(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2)=\theta_1+\theta_2$, dont les pages sont des anneaux.

3. LE CAS DE LA DIMENSION TROIS

Si V est une variété de dimension trois, la reliure K d'un livre ouvert (K,θ) de V est un entrelacs. Une structure de contact ξ est portée par (K,θ) s'il existe une forme de contact α de noyau ξ dont le champ de Reeb est positivement transversal aux pages et tangent positivement à la reliure.

Avant leur formalisation par Giroux, les livres ouverts apparaissaient déjà en filigrane dans la littérature de contact. Dans son travail fondateur **[3]**, Bennequin utilise le fait que la structure standard ζ_0 d'équation $\ker(dz+r^2d\phi)$ dans $\mathbb{R}^3$ muni de coordonnées cylindriques est portée par le livre ouvert dont les pages sont des demi-plans reliés sur l'axe vertical $\{r=0\}$. Il réussit à rendre transversal aux pages tout nœud transversal à ζ_0 par une isotopie de nœuds transversaux à ζ_0. Dans **[56]**, Thurston et Wilkenkemper utilisent les livres ouverts pour montrer que toute variété de dimension trois porte une structure de contact. En fait, ils obtiennent même que, suivant la terminologie de Giroux, tout livre ouvert porte une structure de contact. Pour finir,