363-364

ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉ N° 1074

Anne de BOUARD

Construction de solutions pour des EDP sur-critiques à données initiales aléatoires

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90 € ($ 135)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Novembre 2013
66^{e} année, 2013-2014, n^{o} 1074, p. 1 à 23

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS POUR DES EDP SUR-CRITIQUES À DONNÉES INITIALES ALÉATOIRES [d'après N. Burq et N. Tzvetkov]

par **Anne de BOUARD**

1. INTRODUCTION

L'une des questions fondamentales dans la théorie des équations aux dérivées partielles est la notion de problème bien posé. Pour les problèmes d'évolution, en particulier, il est essentiel de savoir si, étant donné un état à l'instant initial, il existe bien une unique solution de l'équation, et si cette solution dépend bien continûment de cet état initial. La notion de problème bien posé remonte à Hadamard. Pour la plupart des EDP d'évolution classiques, la réponse à cette question est positive si les données sont suffisamment régulières, et il n'est en général pas difficile de démontrer que pour un état initial régulier, il existe bien une unique solution, au moins sur un court intervalle de temps. On peut alors se demander quelle régularité minimale pour la donnée initiale permet d'obtenir un problème bien posé. La question peut paraître futile, dès lors que l'on sait résoudre le problème avec une régularité suffisamment basse pour que les fonctionnelles spécifiques de l'équation (énergie, entropie,...) permettent de globaliser les solutions, mais il s'avère que cette étude peut parfois donner des indications sur les mécanismes qui régissent la dynamique du modèle considéré. Le problème d'existence de solutions peu régulières est également motivé, pour des équations hamiltoniennes comme celles considérées ici, par l'existence de mesures de Gibbs, invariantes au moins formellement pour le flot, et parfois supportées par des espaces de fonctions peu régulières. On renvoie à la section 4 pour un bref aperçu de ces questions.

Pour certaines EDP classiques — comme pour l'équation des ondes semi-linéaires dont nous allons parler plus particulièrement ici, ou pour certaines équations dispersives — pour lesquelles il est naturel de chercher les solutions dans les espaces de Sobolev, cet exposant de régularité critique peut parfois être obtenu de manière heuristique en utilisant un argument d'échelle (voir plus loin). Une fois cet exposant critique obtenu de manière heuristique, on peut tenter de démontrer qu'en dessous de cette régularité critique le problème est mal posé, en exhibant une suite de données initiales qui contredit la continuité de la solution par rapport à l'état initial.

Le but de cet exposé est de décrire, pour certaines équations pour lesquelles la théorie déterministe est bien calibrée, c'est-à-dire que l'on connaît l'exposant de régularité critique et que l'on sait démontrer que le problème est mal posé en dessous de cette régularité critique, comment on peut néanmoins montrer que le problème reste bien posé, à condition de le considérer dans un sens probabiliste. Ces résultats sont tirés de trois articles de N. Burq et N. Tzvetkov ([**15, 16, 17**]) qui ont par la suite été généralisés, par les mêmes auteurs et par d'autres, à d'autres modèles (voir la section 4).

Par souci de pédagogie, et pour ne pas mêler les arguments probabilistes utilisés par N. Burq et N. Tzvetkov pour améliorer les résultats déterministes avec des arguments beaucoup plus techniques concernant la résolution du problème d'évolution déterministe, on adopte ici le point de vue de [**17**]. On considère donc l'équation des ondes cubiques défocalisante, posée sur le tore plat en dimension trois :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + u^3 = 0, \\ (u, \partial_t u)_{t=0} = (u_0, u_1), \end{cases} \tag{1}$$

où $u = u(t,x)$, pour $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$, et $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$.

Il est naturel de chercher les solutions de (1) qui sont continues en temps à valeurs dans les espaces de Sobolev, puisque ces derniers sont préservés par le flot de l'équation linéaire. Plus précisément, on supposera que $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s \equiv H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$, pour un réel $s \geq 0$. On remarque que, pour $s = 1/2$, l'espace $\mathcal{H}^s$ est préservé par le changement d'échelle $u_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon} u(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon})$, comme l'est également l'équation (1). Ceci suggère donc que $s = 1/2$ est bien l'exposant critique. Il existe une très vaste littérature concernant le problème de Cauchy pour l'équation des ondes semi-linéaire ([**24, 25, 26, 27, 28, 29, 36, 46, 40**],...). La théorie locale pour l'équation (1) est maintenant bien comprise (c'est vrai aussi si l'équation est posée sur une variété riemannienne compacte sans bord plus générale), et on peut montrer que l'équation est bien posée dans $\mathcal{H}^s$, pour $s \geq 1/2$, en utilisant les arguments de Ginibre et Velo [**27**] et Lindblad et Sogge [**36**] pour le cas de $\mathbb{R}^3$, et les inégalités de Strichartz démontrées par Kapitanski [**32**] si $s < 1$ (voir la section 1). Pour $s < 1/2$, il est connu que le problème est mal posé localement, et des contre-exemples ont été exhibés par Christ-Colliander et Tao [**19**] et Lebeau [**34**] dans le cas de $\mathbb{R}^3$, basés sur l'argument d'échelle mentionné plus haut, et qui peuvent être adaptés au cas du tore (voir aussi [**15**] pour un contre-exemple dans le cas d'une variété compacte plus générale). L'idée de N. Burq et N. Tzvetkov est alors de considérer que la donnée initiale est non pas fixée dans $\mathcal{H}^s$, mais distribuée suivant une certaine mesure de probabilité. Sous réserve d'une décroissance suffisante de la « densité » de cette mesure, il est possible de montrer que, presque sûrement, l'évolution libre gagne suffisamment en intégrabilité pour obtenir l'existence d'une unique solution globale de (1) par des arguments déterministes. Des détails sur la construction de la mesure, ses propriétés et la manière dont l'intégrabilité supplémentaire de l'évolution libre peut être obtenue sont donnés dans la section 2. On note que la mesure utilisée pour obtenir des solutions globales dans [**17**] est bien plus générale que celle de [**16**] où la globalisation est obtenue grâce au fait que la mesure utilisée est une mesure invariante pour le flot de (1) (argument utilisé pour la première fois par Bourgain dans [**4**]). Dans la section 3, on expliquera comment obtenir, pour les solutions construites dans la section précédente, certaines propriétés de continuité « probabiliste » du flot associé, ce qui est essentiel pour pouvoir affirmer qu'en probabilisant la donnée initiale de cette façon, on perd dans un certain sens le caractère mal posé du flot pour s entre 0 et $1/2$. La section 4 sera quant à elle consacrée à la description d'un certain nombre de généralisations et de résultats obtenus à la suite des idées développées dans [**15, 16, 17**], notamment pour l'équation de Schrödinger non linéaire. On notera qu'en parallèle, un résultat du même type a été obtenu par Colliander et Oh [**20**], pour l'équation de Schrödinger non linéaire avec renormalisation de Wick (voir aussi la section 4).

Remerciements. — Je suis particulièrement redevable à N. Tzvetkov pour son éclairage, ses réponses à mes nombreuses questions, pour la preuve de la proposition 4.4 [**51**], et pour ses remarques sur le texte. Merci également à B. Merlet pour sa relecture et ses remarques sur une première version du texte.

2. QUELQUES RÉSULTATS DÉTERMINISTES

Afin d'expliquer l'obstruction qui dans la théorie déterministe empêche de descendre en dessous de la régularité $H^{1/2}$, on commence par énoncer le résultat déterministe optimal et donner une idée de la preuve, qui utilise, pour $s < 1$, les inégalités de Strichartz, même si celles-ci ne seront pas nécessaires lors du passage au cadre aléatoire.

Théorème 2.1. — *Le problème de Cauchy* (1) *est bien posé dans* $\mathscr{H}^s$, *pour* $s \geq 1/2$, *i.e., pour tout* $(u_0, u_1) \in \mathscr{H}^s$, *il existe* $T > 0$ *et une unique solution* u *de* (1), *avec* $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^3)) \cap C^1([0,T]; H^{s-1}(\mathbb{T}^3))$, *et cette solution est continue par rapport à la donnée* $(u_0, u_1) \in \mathscr{H}^s$.