

363-364

ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI

VOLUME 2013/2014

EXPOSÉ N° 1075

Gilles COURTOIS

Lemme de Margulis à courbure de Ricci minorée

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Comité de rédaction

Ahmed ABBES
Viviane BALADI
Laurent BERGER
Gérard BESSON
Philippe BIANE
Hélène ESNAULT

Damien GABORIAU
Michael HARRIS
Fabrice PLANCHON
Pierre SCHAPIRA
Bertrand TOËN

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90 € (\$ 135)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € (\$ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

LEMME DE MARGULIS À COURBURE DE RICCI MINORÉE
[d'après Vitali Kapovitch et Burkhard Wilking]

par Gilles COURTOIS

INTRODUCTION

Soit M une variété riemannienne et soit p un point de M . Les boules $B_r(p)$ de centre p et rayon r de M sont difféomorphes à une boule euclidienne pour $r \leq r_0$ suffisamment petit où r_0 dépend de M et du point p . En général il peut exister des petits lacets homotopiquement non triviaux et la topologie des boules $B_r(p)$ peut être compliquée même lorsque le rayon r est petit : en faisant une homothétie appropriée, toute variété compacte M coïncide avec $B_r(p)$ pour r arbitrairement petit. Toutefois, contracter une métrique fait exploser sa courbure (sauf si elle est plate) et le lemme de Margulis donne, à courbure sectionnelle bornée, un contrôle uniforme sur le sous-groupe du groupe fondamental engendré par les petits lacets.

THÉORÈME 0.1 ([1][23]). — *Il existe des constantes $\varepsilon(n) > 0$ et $C(n) > 0$ telles que pour toute variété M de dimension n et courbure sectionnelle $-1 \leq K \leq 0$ et tout point $p \in M$, le sous-groupe $\Gamma_{\varepsilon,p}$ de $\pi_1(M, p)$ engendré par les lacets en p de longueur inférieure à $\varepsilon(n)$ est virtuellement nilpotent. De plus l'indice du sous-groupe nilpotent est majoré par $C(n)$.*

Ce théorème, établi dans le cas des espaces symétriques par D. Kazhdan et G. Margulis [21, 25], [4], peut s'interpréter comme une généralisation du théorème de Bieberbach, [2], [1].

THÉORÈME 0.2 ([2]). — *Il existe une constante $C(n) > 0$ telle que tout sous-groupe discret cocompact du groupe des isométries de l'espace euclidien \mathbb{R}^n contient un sous-groupe de translations, isomorphe à \mathbb{Z}^n et d'indice majoré par $C(n)$.*

L'influence de la courbure nulle apparaît dans les preuves du théorème de Bieberbach par l'intermédiaire de la structure du groupe $\text{Is}(\mathbb{R}^n)$ des isométries de

$\mathbb{R}^n : 1 \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Is}(\mathbb{R}^n) \rightarrow O(n) \rightarrow 1$. L'argument clé est en fait la propriété suivante des commutateurs : si $A, B \in O(n)$ sont suffisamment proches de Id , alors $[A, B]$ l'est encore plus. Schématiquement, cette propriété, appliquée aux parties linéaires des isométries du sous-groupe discret d'isométries de \mathbb{R}^n , permet de voir que leurs commutateurs itérés d'ordre assez grand sont des translations. Dans [1], M. Gromov donne une preuve du théorème de Margulis 0.1 selon les mêmes lignes : les bornes sur la courbure sectionnelle garantissent que les holonomies affines le long des petits lacets en p vérifient la propriété des commutateurs (si $c : [0, 1] \rightarrow M$ est un lacet en p , l'holonomie affine le long de c est l'isométrie affine α de $T_p M$ définie pour $v \in T_p M$ par $\alpha(v) = Av + \dot{c}(1)$ où la partie linéaire A de α est induite par le transport parallèle le long de c).

Dans les arguments évoqués ci-dessus, la courbure sectionnelle joue un rôle crucial ; cependant V. Kapovitch et B. Wilking ont récemment établi un « lemme de Margulis généralisé » où la seule courbure de Ricci est supposée minorée. Ce résultat était conjecturé par M. Gromov, [17], chapitre 5 F+.

THÉORÈME 0.3 ([20]). — *Il existe des constantes $\varepsilon := \varepsilon(n) \in]0, 1[$ et $C(n) > 0$ telles que, pour toute variété riemannienne complète M de dimension n à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, l'image de l'homomorphisme induit par l'inclusion $\pi_1(B_\varepsilon(p), p) \rightarrow \pi_1(B_1(p), p)$ contient un sous-groupe nilpotent N d'indice majoré par $C(n)$. De plus, N a une base nilpotente de longueur au plus n .*

Notons qu'une base nilpotente d'un groupe N est un ensemble de générateurs $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ tel que pour tous i, j , $1 < i < j \leq k$, le commutateur $[b_i, b_j]$ est contenu dans le sous-groupe $\langle b_1, \dots, b_{i-1} \rangle$ et pour tout i , $1 \leq i \leq k$, $[b_1, b_i] = 1$.

Remarque 0.4. — Une version antérieure de ce théorème, avec une hypothèse de minoration de la courbure sectionnelle et sans borne uniforme sur l'indice du sous-groupe nilpotent avait été établie par V. Kapovitch, A. Petrunin et W. Tuschmann, [19]. Ce théorème, toujours sans la borne uniforme sur l'indice du sous-groupe nilpotent, découle également des travaux de E. Breuillard, B. Green et T. Tao sur les groupes approximatifs, [3, 13].

Remarque 0.5. — Soit M une variété riemannienne dont tout point est à distance inférieure à d d'un point fixé $p \in M$, par exemple M est une variété compacte de diamètre d ou bien une boule de rayon d ; alors $\pi_1(M, p)$ est engendré par des lacets de longueur inférieure à $2d$, [17], Proposition 3.22. Dans le théorème 0.3, l'image de l'homomorphisme induit par l'inclusion $\pi_1(B_\varepsilon(p)) \rightarrow \pi_1(B_1(p))$ est donc le sous-groupe de $\pi_1(B_1(p))$ engendré par les lacets de longueur inférieure à 2ε et le théorème 0.3 est bien une généralisation du théorème 0.1.

Dans le cas où une variété de dimension n à courbure de Ricci minorée est de diamètre inférieur à $\varepsilon(n)$, le théorème 0.3 donne la version à courbure de Ricci minorée du théorème des variétés presque plates de M. Gromov, [5, 16].

COROLLAIRE 0.6. — *Il existe des constantes $\varepsilon(n) > 0$ et $C(n) > 0$ telles que, pour toute variété riemannienne compacte de dimension n , de courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, et de diamètre majoré, $\text{diam} \leq \varepsilon(n)$, le groupe fondamental $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe nilpotent N d'indice majoré par $C(n)$. De plus, N possède une base nilpotente de longueur majorée par n .*

Remarque 0.7. — Dans le lemme de Margulis ou le théorème des variétés presque plates, le passage de la courbure sectionnelle à la courbure de Ricci est tout sauf anodin. Des bornes sur la courbure sectionnelle donnent accès par l'intermédiaire des théorèmes de Toponogov à un contrôle des fonctions distances et donc à la géométrie locale. Ceci n'est plus vrai si l'on dispose seulement d'une borne inférieure de la courbure de Ricci qui ne donne qu'un contrôle sur les volumes par le théorème de Bishop-Gromov et des estimées « en moyenne » plutôt que des estimées ponctuelles. Les méthodes sont donc différentes et la démonstration de V. Kapovitch et B. Wilking est fondée sur un argument par l'absurde. Cet argument repose fortement sur la théorie de Cheeger-Colding décrivant la structure des limites au sens de Gromov-Hausdorff des suites de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorées. En particulier, les constantes $\varepsilon(n)$ et $C(n)$ ne sont pas explicites.

Dans le théorème 0.3, le sous-groupe nilpotent N est de rang inférieur ou égal à n . En fait, le rang peut être égal à n , par exemple dans le cas où M^n est une nilvariété. C'est en fait le seul cas possible à revêtement fini près.

THÉORÈME 0.8. — *Il existe une constante $\varepsilon := \varepsilon(n) > 0$ telle que pour toute variété riemannienne de dimension n à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, si l'image de l'homomorphisme induit par l'inclusion $\pi_1(B_\varepsilon(p)) \rightarrow \pi_1(B_1(p))$ contient un sous-groupe nilpotent N de rang n , alors M est homéomorphe à une infranilvariété.*

À diamètre borné, le sous-groupe nilpotent d'indice fini dans le théorème 0.3 est indépendant du point base.

THÉORÈME 0.9. — *Pour tout entier n et tout réel D , il existe des constantes positives ε_0 et C telles que si M est une variété riemannienne compacte de dimension n , de courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, et de diamètre majoré, $\text{diam}(M) \leq D$, alors il existe $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ et un sous-groupe normal N de $\pi_1(M)$ tels que :*

- (1) N est nilpotent et possède une base nilpotente de cardinal inférieur ou égal à n ;
- (2) pour tout point $p \in M$, l'image de l'homomorphisme induit par l'inclusion $\pi_1(B_{\frac{\varepsilon}{1000}}(p), p) \rightarrow \pi_1(M, p)$ contient N ;