363-364 ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉ N° 1076

Laurent DESVILLETTES

Progrès récents concernant le programme de Kac en théorie cinétique

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90 € ($ 135)
Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Novembre 2013
66e année, 2013-2014, n° 1076, p. 57 à 77

PROGRÈS RÉCENTS CONCERNANT LE PROGRAMME DE KAC EN THÉORIE CINÉTIQUE
[d'après Stéphane Mischler et Clément Mouhot]

par **Laurent DESVILLETTES**

1. INTRODUCTION

1.1. Le sixième problème de Hilbert

Les principales équations de la mécanique des fluides (systèmes d'Euler et de Navier-Stokes des fluides compressibles et incompressibles, équation de Boltzmann des gaz raréfiés) ont été introduites dès le dix-huitième et le dix-neuvième siècle, et sont utilisées à grande échelle (souvent dans le cadre de couplages avec d'autres équations) pour la simulation numérique de processus naturels (météorologie, océanographie, etc.) ou industriels (aéronautique, génie des procédés, acoustique, etc.).

Ces équations peuvent être vues comme des substituts aux systèmes d'équations différentielles ordinaires vérifiés par les trajectoires (dans l'espace des phases) de particules soumises aux équations de la mécanique classique, lorsque le nombre de ces particules est très grand.

Les fonctions intervenant comme paramètres dans les équations de la mécanique des fluides (viscosités dans les équations de Navier-Stokes des fluides compressibles, section efficace de collision dans l'équation de Boltzmann) peuvent, par des raisonnements heuristiques, se déduire des potentiels d'interaction grâce à des formules connues depuis les travaux de Boltzmann ([**4**]) et ceux de Chapman et Enskog ([**7**]).

La question de la formalisation mathématique du passage de systèmes de N particules vers ces équations a été explicitement posée dès 1900 au Congrès de Mathématiques à Paris par Hilbert. Dans son sixième problème présenté à cette époque, Hilbert proposait de « développer mathématiquement les limites qui mènent de la vision atomiste aux lois de la mécanique des milieux continus ».

La question spécifique de la dérivation de l'équation de Boltzmann à partir des systèmes de N particules est progressivement apparue comme l'un des points décisifs dans le sixième problème de Hilbert, en particulier parce qu'elle est reliée à la question fascinante de l'apparition de l'irréversibilité dans les passages à la limite réalisés à partir de systèmes réversibles. Notons qu'un autre aspect important du sixième problème, celui du lien entre l'équation de Boltzmann et les équations d'Euler et de Navier-Stokes, a connu des développements récents qui ont été présentés dans un précédent séminaire Bourbaki (cf. [**24**] et les travaux qui y sont cités).

Un résultat décisif dans l'étude mathématique de la dérivation de l'équation de Boltzmann à partir des systèmes de N particules a été obtenu dans les années 70 par Lanford (cf. [**19**]). Il permet, en rendant rigoureuse l'asymptotique dite de Boltzmann-Grad, de montrer la validité de cette équation (avec un choix spécifique de sections efficaces) dans le cadre de solutions locales en temps, ou, grâce à une extension due à Illner et Pulvirenti, dans le cadre de solutions proches de zéro (cf. [**14**] et [**15**]). La possibilité d'étendre ce résultat de validité à un cadre de solutions (qui ne soient pas proches du vide) définies pour des temps plus significatifs au niveau macroscopique est une question restée pour l'instant sans réponse, malgré des recherches actives (cf. [**11**]).

1.2. Le programme de Kac

Un programme d'étude introduit au milieu du 20ème siècle par Kac (cf. [**16**] et [**17**]) propose un point de vue différent sur la justification de l'équation de Boltzmann. L'idée est de se concentrer sur l'évolution des vitesses des particules, sans chercher à suivre l'évolution de leurs positions comme on le fait dans l'asymptotique de Boltzmann-Grad.

On remplace alors comme point de départ de l'étude les équations de Newton (typiquement, $6N$ équations différentielles ordinaires qui permettent de suivre les particules dans l'espace des phases) par un processus markovien de saut dans l'espace $\mathbb{R}^{3N}$ des vitesses des N particules. Ce processus s'écrit de manière générale à l'aide d'un générateur (il s'agit ici du générateur du problème « backward ») de la forme (pour $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^3$, et $\phi \in C_b(\mathbb{R}^{3N})$)

$$(1) \quad (G^N \phi)(v_1, \dots, v_N) = \frac{1}{N} \sum_{1 \le i < j \le N} \Gamma(|v_i - v_j|)$$
$$\times \int_{S^2} \Big(\phi(v_1, \dots, v_i', \dots, v_j', \dots, v_N) - \phi(v_1, \dots, v_N) \Big) \, b(\cos\theta_{ij}) \, d\sigma,$$

où Γ est une fonction de la norme de la vitesse relative $|v_i - v_j|$ (ce qui est cohérent si l'on veut s'assurer de l'invariance galiléenne du processus), et les vitesses v_i', v_j' obtenues après un saut du processus sont données par

$$v_i' = \frac{v_i + v_j}{2} + \frac{|v_i - v_j|}{2}\,\sigma, \qquad v_j' = \frac{v_i + v_j}{2} - \frac{|v_i - v_j|}{2}\,\sigma$$

(il s'agit là d'une paramétrisation des collisions préservant la quantité de mouvement et l'énergie cinétique). Enfin, b est une fonction positive du paramètre angulaire

$$\cos\theta_{ij} = \frac{v_i - v_j}{|v_i - v_j|} \cdot \sigma.$$

Intuitivement, ce processus peut être compris de la manière suivante : parmi un jeu de N particules de vitesses $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^3$, on en sélectionne deux (celles de vitesses v_i et v_j) après avoir attendu un temps exponentiel, et on change alors la vitesse de ces deux particules en v'_i, v'_j après tirage aléatoire d'un vecteur (sur la sphère) σ. Le temps exponentiel et la loi du tirage aléatoire sont choisis pour être cohérents avec Γ et b. On itère ensuite cette procédure pour avancer dans le temps. Notons enfin que, comme $\frac{1}{N}\sum_{1\leq i<j\leq N}$ est d'ordre N, on s'attend à ce qu'il y ait de l'ordre de N sauts par unité de temps, soit de l'ordre d'un saut par particule et par unité de temps (si on avait pris $\frac{1}{N^2}$ au lieu de $\frac{1}{N}$, comme cela peut *a priori* sembler plus naturel, on obtiendrait un processus associé à des temps exponentiels d'ordre 1, mais pour lequel la probabilité *pour une particule donnée* de sauter dans un temps d'ordre 1 tend vers 0 avec N).

On comprend l'intérêt qu'a pu susciter l'introduction de ce processus dans les décennies qui ont suivi quand on sait que la grande majorité des codes de simulation numérique utilisés en pratique pour l'équation de Boltzmann sont du type « DSMC » (Direct Simulation Monte Carlo), c'est-à-dire qu'ils utilisent une discrétisation particulaire (une fonction y est approximée par une combinaison linéaire de masses de Dirac), et qu'à chaque pas de temps un processus identique ou très proche de celui précédemment décrit est mis en place dans chaque maille d'espace pour traiter l'évolution de la partie « vitesses » de l'équation de Boltzmann (cf. [**2**]).

Le programme de Kac consiste à étudier les relations entre le processus de générateur (1) et l'équation de Boltzmann homogène en espace définie ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,v) = Q(f)(t,v), \tag{2}$$

avec

$$Q(f)(t,v) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2}\Big(f(t,v'^*)\,f(t,v') - f(t,v^*)f(t,v)\Big)\,\Gamma(|v-v^*|)\,b(\cos\theta)\,d\sigma dv^*, \tag{3}$$

où

$$v' = \frac{v+v^*}{2} + \frac{|v-v^*|}{2}\sigma, \qquad v'^* = \frac{v+v^*}{2} - \frac{|v-v^*|}{2}\sigma,$$

et

$$\cos\theta = \frac{v-v^*}{|v-v^*|}\cdot\sigma.$$

Plus précisément, on souhaite savoir en quel sens les solutions de l'équation maîtresse (« forward ») associée au processus de générateur (1) convergent vers les solutions de l'équation de Boltzmann homogène en espace (2).