369

ASTÉRISQUE

2015

DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
AUX FORMES AUTOMORPHES (I)

J.-B. BOST, P. BOYER, A. GENESTIER,
L. LAFFORGUE, S. LYSENKO, S. MOREL, B.C. NGÔ, eds.

QUELQUES RÉSULTATS ET CONJECTURES CONCERNANT LA COURBE

Laurent FARGUES

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 369, 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`smf@smf.univ-mrs.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 82 € ($ 123)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-805-3

Directeur de la publication : Marc Peigné

Astérisque
369, 2015, p. 325–374

QUELQUES RÉSULTATS ET CONJECTURES CONCERNANT LA COURBE

par

Laurent Fargues

Résumé. — On commence par établir quelques propriétés de la version rigide analytique de la « courbe » introduite dans nos travaux en commun avec J.-M. Fontaine. On montre ensuite comment construire à partir de phi-modules au sens de Breuil-Kisin des modifications de fibrés sur cette courbe. Enfin, on formule une conjecture concernant cette construction.

Abstract **(Some results and conjectures concerning the curve).** — We first establish some properties of the rigid analytic version of the "curve" we introduced in our joint work with J.-M. Fontaine. We then show how to construct some modifications of vector bundles on this curve from some phi-modules in Breuil-Kisin sens. Finally, we enounce a conjecture about this construction.

Introduction

Soit E un corps local localement compact de caractéristique résiduelle p et F un corps perfectoïde de caractéristique p extension du corps résiduel de E ([**13**]). Dans notre travail en commun avec J.M.-Fontaine ([**2**], cf. [**3, 4, 5**] pour une introduction) nous avons défini une « courbe »

$$X_{F,E}$$

canoniquement associée à la donnée de E et F. Il s'agit d'un E-schéma noethérien intègre régulier de dimension 1 *i.e.* un recollement d'un nombre fini de spectres d'anneaux de Dedekind. Cette courbe est complète au sens où tout point fermé $x \in X$ possède naturellement un degré $\deg(x) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ égal à 1 si F est algébriquement clos et le degré d'un diviseur principal sur $X_{F,E}$ est nul

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0.$$

Classification mathématique par sujets **(2010).** — 14L05, 14G22.
Mots clefs. — Théorie de Hodge p-adique, géométrie rigide, groupes p-divisibles.

The author acknowledges support from ANR-10-BLAN-0114 "ArShiFo".

Nous avons de plus donné une classification des fibrés vectoriels sur $X_{F,E}$. Plus précisément, lorsque F est algébriquement clos cette classification généralise celle de Grothendieck des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^1$, quitte à admettre des pentes rationnelles. Cela signifie que pour toute pente $\lambda \in \mathbb{Q}$ on dispose d'un fibré stable de pente λ, $\mathcal{O}(\lambda)$, sur $X_{F,E}$ et le théorème de classification s'énonce en : tout fibré vectoriel sur $X_{F,E}$ est isomorphe à une somme directe de $\mathcal{O}(\lambda), \lambda \in \mathbb{Q}$. Les fibrés semi-stables de pente λ fixée sont quant à eux isomorphes à une somme de $\mathcal{O}(\lambda)$. Lorsque F n'est plus algébriquement clos la classification s'énonce en termes de descente galoisienne à partir du cas algébriquement clos. Au niveau des fibrés semi-stables de pente 0 elle dit que l'on dispose d'une équivalence « du type Narasimhan-Seshadri » entre fibrés semi-stables de pente 0 et E-systèmes locaux sur $\mathrm{Spec}\,(F)_{\text{ét}}$.

Structure analytique sur la courbe et GAGA. — Le but de cette note est double. Tout d'abord, il est apparu dans nos travaux avec Fontaine que la courbe, bien qu'algébrique, devrait posséder une structure analytique sur E. Plusieurs indices nous ont mené à cette conclusion. Tout d'abord, si $x \in |X|$ est un point fermé, le corps résiduel $k(x)|E$ est naturellement un corps valué complet perfectoïde satisfaisant $k(x)^\flat|F$ avec $\deg(x) = [k(x)^\flat : F]$. De plus, nous avons exhibé une bijection naturelle

$$|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$$

où $|Y|$ est un ensemble d'idéaux maximaux fermés d'une E-algèbre de Fréchet B « de fonctions holomorphes de la variable π à coefficients dans F » et φ un Frobenius. Nous avons donc conjecturé avec Fontaine que la courbe est uniformisée par un espace analytique qu'il restait à définir. Nous nous attelons à cette tâche dans la section 2 de cet article. Plus précisément, nous construisons un E-espace adique

$$Y^{ad}$$

au sens de Huber vérifiant

$$\Gamma(Y^{ad}, \mathcal{O}_{Y^{ad}}) = \mathrm{B}$$

et muni d'un Frobenius φ agissant de façon totalement discontinue sans points fixes sur Y^{ad}. Cela nous permet de définir un E-espace adique

$$X^{ad}_{F,E} := Y^{ad}/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

qui est « l'analytifié » de la courbe. La courbe algébrique se retrouve alors comme

$$X_{F,E} = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d\geqslant 0} \Gamma\big(X^{ad}_{F,E}, \mathcal{O}(d)\big)\right)$$

où $\mathcal{O}(1)$ est un fibré « ample » sur $X^{ad}_{F,E}$. Supposons que $E|\mathbb{Q}_p$ *i.e.* est de caractéristique 0. Soit $E_\infty|E$ une extension algébrique arithmétiquement profinie. D'après la théorie du corps des normes de Fontaine-Wintenberger le corps valué $\widehat{E}_\infty$ est perfectoïde. Nous montrons qu'après extension des scalaires à $\widehat{E}_\infty$, l'espace adique $X^{ad}_{F,E}$

devient perfectoïde et on exprime dans la section 2.3 l'espace perfectoïde basculé

$$\big(X_{F,E}^{ad}\hat{\otimes}_E\widehat{E}_\infty\big)^\flat$$

comme étant

$$X_{F,\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))}^{ad}\hat{\otimes}\widehat{E}_\infty^\flat$$

où $\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))\subset\widehat{E}_\infty^\flat$ est le corps des normes non-parfait. Lorsque F est algébriquement clos et E_∞ est l'extension engendrée par les points de torsion d'un groupe de Lubin-Tate $\mathscr{G}$ sur $\mathcal{O}_E$, nous avons donné avec Fontaine une description des points fermés de $|X_{F,E}|$ comme étant

$$\big(\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)\smallsetminus\{0\}\big)/E^\times$$

l'espace projectif sur le E-espace de Banach $\mathscr{G}(\mathcal{O}_F)$. Nous montrons dans la section 2.5 que cette bijection correspond à un isomorphisme naturel d'espaces perfectoïdes

$$\big(Y_{F,E}^{ad}\hat{\otimes}\widehat{E}_\infty\big)^\flat\simeq\varprojlim_{\times\pi}\ \mathcal{G}_{\mathcal{O}_F}^{ad}$$

où $\mathcal{G}_{\mathcal{O}_F}^{ad}$ est la fibre générique sur $\mathcal{O}_F$-schéma formel formel $\mathcal{G}_{\mathcal{O}_F}$, une boule ouverte de dimension 1, et l'action de $\mathrm{Gal}(E_\infty|E)$ sur le membre de gauche correspond *via* le caractère de Lubin-Tate à l'action de $\mathcal{O}_E^\times$ sur celui de droite.

La similitude frappante entre notre classification des fibrés sur la courbe et la classification de Kedlaya ([**10**]) est l'objet de la section 3. Nous montrons que l'on peut interpréter la concordance entre ces théorèmes comme une équivalence de type GAGA entre faisceaux cohérents

$$\mathrm{Coh}_{X_{F,E}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Coh}_{X_{F,E}^{ad}}.$$

φ-modules de Kisin et modifications de fibrés. — Le second but de cet article est d'établir les premières étapes vers un analogue de la théorie de Kisin ([**11**]) sur la courbe. C'est l'objet de la section 4. Le cas traité par Kisin correspond à celui d'un corps local de caractéristique p, $k((u))$, par opposition au cas d'un corps perfectoïde F que nous étudions. Nous traitons en fait la théorie de deux points de vue : le point de vue « analytique » proche du point de vue originel de Kisin où nous utilisons l'espace Y^{ad} et les fibrés sur celui-ci et le point de vue plus « algébrique » n'utilisant pas le théorème de Kedlaya qui est celui de Genestier et Lafforgue dans [**6**] et [**7**]. Ils nous semble que les deux points de vue se complètent et méritent d'être traités. On se limite au cas F algébriquement clos afin de ne pas prendre de risque quant à la conjecture que l'on formule, même s'il est fort probable qu'une théorie existe lorsque F est perfectoïde quelconque.

Soit donc

$$\mathfrak{S}=W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$$

muni de son Frobenius φ qui correspond à l'anneau $W(k)[\![u]\!]$ muni du Frobenius $u\mapsto u^p$ du point de vue de Kisin. Un élément primitif est un $x=\sum_{n\geqslant 0}[x_n]\pi^n\in\mathfrak{S}$ vérifiant $x_0\neq 0$ et pour un entier d, $x_d\in\mathcal{O}_F^\times$. Les éléments primitifs sont les analogues