370 ASTÉRISQUE

2015

DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
AUX FORMES AUTOMORPHES (II)

J.-B. BOST, P. BOYER, A. GENESTIER,
L. LAFFORGUE, S. LYSENKO, S. MOREL, B.C. NGÔ, eds.

MAUVAISE RÉDUCTION AU BORD

Benoît STROH

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 370, 2015

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
`smf@smf.univ-mrs.fr`	Inde	`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 98 € ($ 147)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-806-0

Directeur de la publication : Marc Peigné

Astérisque
370, 2015, p. 269–304

MAUVAISE RÉDUCTION AU BORD

par

Benoît Stroh

À Gérard Laumon, avec admiration

Résumé. — Nous étudions la mauvaise réduction au bord de certaines variétés de Shimura, et notamment son aspect cohomologique ℓ-adique. Nous montrons qu'en niveau Iwahori, il y a commutation des foncteurs cycles proches et prolongement intermédiaire à la compactification de Satake. Nous en déduisons des généralisations de résultats de Morel sur la cohomologie d'intersection de ces compactifications. Nous montrons ensuite comment étendre nos résultats au cas des structures de niveau pro-p-Iwahori.

***Abstract* (Bad reduction at the boudary).** — We study the bad reduction at the boundary of some Shimura varieties, and its influence on ℓ-adic cohomology. We show that in Iwahori level, there is commutation between the nearby cycles functor and the intermediate extension functor to Satake compactification. We deduce generalizations of results of Morel on the intersection cohomology of such varieties. We then show how to extend these results to the case of pro-p-Iwahori level structures.

Cet article constitue un panorama de quelques questions reliant les cycles proches de variétés de Siegel et leur cohomologie d'intersection.

Le premier thème concerne les cycles proches en niveau Iwahori et notamment leur trace semi-simple du Frobenius définie par Rapoport. La théorie est due à De Jong, Rapoport, Zink, Kottwitz, Gaitsgory, Haines et Ngô et cette partie de l'article ne consiste qu'en des rappels de leurs résultats. Soient $g \geqslant 1$, $n \geqslant 3$ des entiers, p un nombre premier ne divisant pas n et ℓ un nombre premier différent de p. Notons $\mathcal{A}_0$ la variété de Siegel de niveau iwahorique sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui paramètre les variétés abéliennes principalement polarisées de genre g munies d'une base symplectique de leur n-torsion et d'un drapeau complet de sous-groupes finis et plats de leur p-torsion. Cette variété lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$ a mauvaise réduction sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et ses

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11G18, 14G35, 14M27, 14F30.
Mots clefs. — Variétés de Shimura; variétés de Siegel; structure de niveau Iwahori; compactification minimale, de Satake et de Baily-Borel; cycles proches; prolongement intermédiaire.

cycles proches $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ codent de manière cohomologique l'allure de cette mauvaise réduction.

D'après Kottwitz et Rapoport, la fibre spéciale $\mathcal{A}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ est munie d'une stratification telle que $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ soit constant sur chaque strate. Les strates de Kottwitz-Rapoport sont indexées par un sous-ensemble fini W^{adm} du groupe de Weyl affine W du groupe des similitudes symplectiques sur le corps local $\mathbb{F}_p((t))$ et la trace semi-simple du Frobenius géométrique sur $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ définit une fonction sur W^{adm} à valeurs dans $\mathbb{Q}_\ell$. Les fonctions à support compact sur W formant l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}}$ du groupe des similitudes symplectiques sur $\mathbb{F}_p((t))$, on a donc défini une fonction $\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}}$ de $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}}$. Le théorème principal, conjecturé par Kottwitz et prouvé par Gaitsgory puis Haines et Ngô prédit que cette fonction est dans le centre $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}}$ de l'algèbre de convolution $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}}$. De plus, son image par les isomorphismes de Bernstein et Satake est explicite.

L'objet central pour étudier la mauvaise réduction de $\mathcal{A}_0$, construire la stratification de Kottwitz-Rapoport et montrer la centralité de $\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}}$ est le modèle local de De Jong, Rapoport et Zink. Ce dernier est une variété projective $\mathcal{M}_0$ définie comme espace de modules de chaînes de réseaux. Elle modèle les singularités de $\mathcal{A}_0$ dans le sens où $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{M}_0$ admettent une fibration lisse commune. En particulier, l'étude de $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ se ramène à celle de $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$. La fibre spéciale de $\mathcal{M}_0$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ se plongeant dans la variété de drapeaux affine du groupe des similitudes symplectiques sur $\mathbb{F}_p((t))$, on obtient le lien direct recherché entre $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ et l'algèbre de Hecke-Iwahori.

Le second thème porte sur la cohomologie d'intersection de la compactification minimale $\mathcal{A}_0^*$ de $\mathcal{A}_0$. Nous commençons par rappeler la structure de cette compactification construite dans [**S2**], ainsi que certaines résolutions partielles de ses singularités construites dans [**S1**]. Nous exposons ensuite les résultats principaux de [**S3**] et commençons par montrer que le prolongement intermédiaire de $\mathcal{A}_0$ à $\mathcal{A}_0^*$ commute au foncteur des cycles proches évalué en des systèmes locaux d'origine géométrique. Nous définissons les compactifications minimales des strates de Kottwitz-Rapoport de $\mathcal{A}_0$ et étudions leur cohomologie d'intersection. Cette cohomologie mélange deux types de prolongements intermédiaires : celui à l'intérieur de $\mathcal{A}_0$ qui est redevable de la théorie de Kazhdan-Lusztig et celui au bord de $\mathcal{A}_0^*$ qui s'étudie grâce à la théorie de Morel [**M2**]. L'utilisation des travaux de Morel permet de caractériser cette cohomologie d'intersection de manière récursive en terme des cohomologies d'intersection de strates de Kottwitz-Rapoport non compactifiées pour des variétés de Siegel de genre plus petit et de structure de niveau iwahorique.

Un résultat similaire est valable pour le prolongement intermédiaire à $\mathcal{A}_0^*$ du faisceau pervers décalé $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$. Nous le montrons en combinant les travaux de [**M2**] aux places de bonne réduction, le théorème de Cebotarev pour les faisceaux pervers sur les schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ dû à Laumon [**L**] et les énoncés de commutation des cycles proches avec les prolongements au bord esquissés plus haut. Nous en déduisons que le prolongement intermédiaire à $\mathcal{A}_0^*$ du faisceau mixte $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ est sans support dans le complémentaire de $\mathcal{A}_0$. Se rappelant des résultats précédents, nous en déduisons une formule pour la trace semi-simple du Frobenius sur le prolongement intermédiaire de $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ en termes de fonctions centrales dans des algèbres de Hecke-Iwahori pour des sous-groupes de Lévi.

Dans le troisième thème, nous expliquons des résultats obtenus en collaboration avec Haines [**HS**]. Ils ont trait non pas à $\mathcal{A}_0$ mais à son revêtement ramifié $\mathcal{A}_1$ qui est la variété de Siegel de niveau pro-p-Iwahori paramétrant des générateurs de Oort-Tate des gradués du drapeau universel de groupes finis et plats. Nous développons une théorie du modèle local pour $\mathcal{A}_1$ qui modèle les singularités de ce schéma, permet de comprendre ses cycles proches et d'interpréter leur trace semi-simple du Frobenius comme fonction dans l'algèbre de Hecke pro-p-Iwahori. Nous construisons plus précisément un torseur $\mathcal{M}_0^+$ sous un tore au dessus de $\mathcal{M}_0$. Si $\mathcal{M}_0^+$ n'a pas plus de singularité que $\mathcal{M}_0$, et donc que $\mathcal{A}_0$, sa fibre spéciale sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ se plonge naturellement dans l'analogue en niveau pro-p-iwahorique de la variété de drapeaux affine. Ce schéma $\mathcal{M}_0^+$ est donc relié à l'algèbre de Hecke pro-p-iwahorique $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}$. Nous construisons ensuite un revêtement ramifié $\Pi : \mathcal{M}_1^+ \to \mathcal{M}_0^+$ qui modèle les singularités de $\pi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_0$ localement pour la topologie lisse. Nous ramenons alors l'étude de $\pi_* \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_1}(\mathbb{Q}_\ell)$ à celle de $\Pi_* \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_1^+}(\mathbb{Q}_\ell)$. Nous montrons enfin que la trace semi-simple du Frobenius sur ce dernier complexe définit une fonction centrale de $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}$. L'image de cette fonction sous divers isomorphismes de Roche est complètement déterminée.

Enfin, le dernier thème, original, généralise simultanément les résultats précédents. Nous construisons la compactification minimale $\mathcal{A}_1^*$ de $\mathcal{A}_1$ et ses résolutions partielles des singularités que sont les compactifications toroïdales. L'approche suivie consiste en fait à construire d'abord ces compactifications toroïdales $\bar{\mathcal{A}}_1$ comme espace de modules de générateurs de Oort-Tate des gradués universels sur les compactifications toroïdales $\bar{\mathcal{A}}_0$ de $\mathcal{A}_0$. Bien sûr, cette approche nécessite de montrer que ces gradués s'étendent de manière finie et plate de $\mathcal{A}_0$ à $\bar{\mathcal{A}}_0$. Une fois l'existence de $\bar{\mathcal{A}}_1$ acquise, la construction de $\mathcal{A}_1^*$ suit des lignes habituelles.

Nous pouvons alors définir les strates de Kottwitz-Rapoport pro-p-iwahoriques, leur compactification minimale puis étudier leur cohomologie d'intersection. Nous montrons comme précédemment des énoncés de commutation des foncteurs de prolongement au bord avec $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_1}(\mathbb{Q}_\ell)$ et en déduisons une formule récursive pour le prolongement intermédiaire à $\mathcal{A}_1^*$ de ce faisceau pervers décalé.

L'auteur souhaite remercier les organisateurs de la conférence en l'honneur de Gérard Laumon. Il remercie également le rapporteur pour sa relecture attentive. Il a par ailleurs bénéficié du projet ANR-10-BLAN 0114 ArShiFo pendant la préparation de cet article.

1. Niveau iwahorique

1.1. Variétés de Siegel. — Soit $g \geqslant 1$ un entier, p et ℓ deux premiers distincts et $n \geqslant 3$ un entier non divisible par p. Notons $\mathcal{A}_0$ le champ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui paramètre les familles $(G, \lambda, \phi, H_\bullet)$ où G est une variété abélienne de polarisation