Astérisque
323, 2009, p. 371–396

SÉRIES DE POINCARÉ MOTIVIQUES D'UN GERME D'HYPERSURFACE IRRÉDUCTIBLE QUASI-ORDINAIRE

par

Guillaume Rond

Résumé. — Nous donnons ici une description combinatoire, faisant intervenir les exposants caractéristiques de la singularité, des arcs tronqués tracés sur un germe d'hypersurface quasi-ordinaire. Cela nous permet d'obtenir une expression inductive des séries de Poincaré de ce type de singularité.

***Abstract* (Motivic Poincaré series of a quasi-ordinary irreducible germ of hypersurface)**
We give here a combinatorial description, using caracteristic exponents of the singularity, of the troncated arcs on a quasi-ordinary hypersurface germ. This allows us to give an inductive expression of the Poincaré series of this kind of singularity.

1. Séries de Poincaré motiviques

Soit $(X,0)$ un germe d'espace analytique sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique nulle. Soit p un entier naturel. Nous définissons l'espace des jets d'ordre p, noté X_p, comme étant la variété algébrique sur $\mathbb{k}$ dont les points $\mathbb{K}$-rationnels, pour toute extension de corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{k}$, sont les $\mathbb{K}[t]/t^{p+1}$-points de $(X,0)$. C'est-à-dire que nous avons $X_p = \{\varphi : \operatorname{Spec}\mathbb{k}[[t]]/t^{p+1} \longrightarrow (X,0)\}$. Dans le cas particulier où $(X,0)$ est un germe d'espace analytique défini par les équations $f_i(x)=0$, pour $i=1,\dots,r$ et $x=(x_1,\dots,x_s)$, alors X_p est la variété affine définie par les équations en les variables $x_{j,k}$ pour $k=1,\dots,p$ et $j=1,\dots,s$, provenant du fait que $f_i(x_{j,1}t+\cdots+x_{j,p}t^p)=0$ mod t^{p+1} pour tout i.

La limite projective de ces variétés, appelée espace des arcs sur X, est notée X_∞ et n'est en général pas de type fini sur $\mathbb{k}$.

Nous avons les morphismes naturels de troncations

$$\pi_p \ : \ X_\infty \longrightarrow X_p \ \text{ et } \ \pi_{p,q} \ : \ X_p \longrightarrow X_q \text{ pour } p \geq q\ .$$

Nous nous intéressons ici au comportement des arcs tronqués, c'est-à-dire aux $\pi_p(X_\infty)$ quand p varie. Nous savons, d'après le théorème de Greenberg **[13]**, que ce sont des

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 14B05, 32S25; 11S40, 14J17.
Mots clefs. — Singularités quasi-ordinaires, espaces d'arcs, séries de Poincaré motiviques.

ensembles constructibles. On peut donc considérer leur image dans l'anneau de Grothendieck $K_0(Var_{\Bbbk})$ des variétés sur $\Bbbk$ [**6**]. Plus précisément nous nous intéressons à la série de Poincaré géométrique $P_{\text{géom},X,0}(T) := \sum_{p\geq 0}[\pi_p(X_\infty)]T^p$ où $[Y]$ représente la classe de la variété Y dans $K_0(Var_{\Bbbk})$. Denef et Loeser ont montré que cette série est rationnelle avec un dénominateur qui s'écrit sous forme d'un produit de termes de la forme $1 - \mathbb{L}^a T^b$ où $\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1_{\Bbbk}]$ et $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (cf. [**6**]). Cependant la preuve utilise à la fois la résolution des singularités du germe singulier et un théorème d'élimination des quantificateurs dû à Pas [**23**], et n'apporte aucune information quantitative, en particulier sur les pôles. Cette série a, jusqu'à présent, été calculée pour les branches planes (cf. [**7**]) et les singularités de surfaces toriques normales (cf. [**17**] et [**22**]).

Par ailleurs, on peut aussi considérer φ_p, la formule dans le langage de premier ordre de $\Bbbk[[T]]$, dû à Pas [**23**], qui définit $\pi_p(X_\infty)$, qui est un ensemble constructible, et regarder sa mesure arithmétique $\chi_c(\varphi_p)$ dans l'anneau de Grothendieck $K_0^v(Mot_{\Bbbk,\overline{\mathbb{Q}}})_{\mathbb{Q}}$, c'est-à-dire l'anneau de Grothendieck des motifs de Chow sur $\Bbbk$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ tensorisé avec $\mathbb{Q}$ (cf. [**7**] ou [**14**] pour une introduction). Une autre série intéressante est alors la série définie par $\sum_{p\geq 0}\chi_c(\varphi_p)T^p$. Cette série se spécialise pour tout q premier, sauf un nombre fini, en la série $\sum_{p\geq 0} N_{q^p}(X,0)T^p$, où $N_{q^p}(X,0)$ est le cardinal des $\mathbb{Z}/q^p\mathbb{Z}$-points de $(X,0)$ qui se relèvent en des $\mathbb{Z}_q$-points de $(X,\,0)$. Denef et Loeser ont montré le même résultat de rationnalité pour cette série que pour la série géométrique (cf. [**7**]). Cette série a été calculée pour les branches planes (cf. [**7**]) et les singularités de surfaces toriques normales (cf. [**22**]). Pour les branches planes ces deux séries diffèrent et pour les surfaces normales toriques, J. Nicaise montre l'égalité.

Nous avons effectué ici le calcul des séries géométrique et arithmétique d'un germe d'hypersurface irréductible quasi-ordinaire. Ce type de singularité généralise les singularités de courbes planes dans le sens où il existe un paramétrage de ces singularités à l'aide de séries fractionnaires à plusieurs variables dont le dénominateur est borné. L'ensemble des exposants, apparaissant dans l'écriture des ces séries, appartient au groupe engendré par un nombre fini d'exposants, appelés *exposants caractéristiques*, qui généralisent les exposants caractéristiques d'une courbe plane.

Pour calculer la mesure motivique de l'ensemble des arcs tronqués à l'ordre p, nous décomposons cet ensemble en deux ensembles constructibles : l'ensemble des arcs tronqués qui ne se relèvent pas en arcs inclus dans le complémentaire du tore et son complémentaire. Nous donnons d'abord une caractérisation combinatoire des arcs tronqués qui ne se relèvent pas en arcs inclus dans le complémentaire du tore. Cela nous permet de calculer la mesure motivique de l'ensemble de ces arcs tronqués. Enfin nous donnons une formule de récurrence sur la dimension du germe pour la mesure de son complémentaire. Nous obtenons alors des formules générales, inductives sur la dimension de l'hypersurface, de ces deux séries. Malheureusement ces formules font intervenir des sommes géométriques sur des cônes rationnels assez difficiles à calculer en général. Nous donnons enfin une formule explicite de ces séries dans le cas où les coordonnées des exposants caractéristiques de la singularité sont supérieures à 1, c'est-à-dire quand la projection de celle-ci est « très » transverse (théorème 9.3).

Nous faisons remarquer que ces séries sont différentes des séries d'Igusa étudiées dans [**2**], séries qui sont essentiellement les séries génératrices des espaces de jets tracés sur un germe singulier. Nous pouvons par ailleurs citer le travail en cours [**3**] dû à Helena Cobo Pablos et Pedro Gonzalez-Perez où le calcul des séries de Poincaré motiviques pour les germes de surfaces irréductibles à singularité quasi-ordinaire est fait à l'aide de méthodes de géométrie torique qui s'inspirent du travail effectué dans [**17**].

Je tiens à remercier ici M. Lejeune-Jalabert pour avoir fait preuve de patience à l'écoute de ces résultats et pour ses précieux commentaires. Je remercie aussi J. Nicaise pour m'avoir, le premier, parlé des séries de Poincaré motivique lors du GAEL XII, et Helena Cobo Pablos et Pedro Gonzalez-Perez pour m'avoir indiqué une erreur dans la première version de ce travail.

2. Singularités quasi-ordinaires

2.1. Exposants caractéristiques. — Nous rappelons ici la définition de singularité quasi-ordinaire et les propriétés de ces singularités dont nous aurons besoin.

***Définition 2.1* (cf. [11] par exemple).** — Soit $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_m\}[Y]$ un polynôme distingué. On dit que f est quasi-ordinaire si son discriminant $\Delta_Y(f)$ a un terme dominant, c'est-à-dire si il s'écrit $X^\alpha u$ où $\alpha \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ et u est inversible. Géométriquement, cela revient à dire que le discriminant de la projection du germe $(X, 0) \subset \mathbb{C}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{C}^m$ qui envoie le point de coordonnées $(x_1, \dots, x_m, y)$ sur le point de coordonnées $(x_1, \dots, x_m)$ est à croisements normaux.

Nous avons alors le théorème

***Théorème 2.2* ([10], [20]).** — *Soit f irréductible et quasi-ordinaire. Alors nous avons :*

1. *Si $\deg_Y(f) = n$ alors f a n racines distinctes dans $\mathbb{C}\{X^{\frac{1}{n}}\}$.*
2. *Si ξ est une racine de f dans $\mathbb{C}\{X^{\frac{1}{n}}\}$, alors il existe des élements de $(\frac{1}{n}\mathbb{Z})^m$, strictement ordonnés, $a(1) < \cdots < a(g)$ (i.e. $a_k(1) \leq \cdots \leq a_k(g)$ pour tout k et $a(i) \neq a(j)$ pour $i \neq j$) tels que l'on puisse écrire*

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_g$$

$$\textit{avec} \;\; \xi_0 \in \mathbb{C}\{X\},$$

$$X^c \textit{ apparaît dans } \xi \Longrightarrow c \in \mathbb{Z}^m + \sum_{a(i) \leq c} a(i)\mathbb{Z},$$

$$X^c \textit{ apparaît dans } \xi_i \Longrightarrow c \in \mathbb{Z}^m + \sum_{j \leq i} a(j)\mathbb{Z},$$

$$\textit{et} \;\; \nu_X(\xi_k) = a(k) \;\; \textit{pour tout } k.$$

3. *Si ξ est racine de f dans $\mathbb{C}\{X^{\frac{1}{n}}\}$, alors l'ensemble des racines de f est l'ensemble formé des $\xi(w_1 X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, w_m X_m^{\frac{1}{n}})$ où les w_k parcourent l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.*

Remarque 2.3. — Quitte à faire le changement de variables

$$X_k \longmapsto X_k \ \forall k, \quad \text{et} \quad Y \longmapsto Y + \xi_0$$

nous pouvons supposer que $\xi_0 = 0$ dans le théorème précédent.

Définition 2.4. — Les $a(k)$ du lemme précédent sont appelés les exposants caractéristiques de f.

Nous pouvons définir les réseaux $M = M_0 := \mathbb{Z}^m$ et $M_k := \mathbb{Z}^m + \sum_{l \leq k} a(l)\mathbb{Z}^m$ pour $1 \leq k \leq g$ et les réseaux duaux $N_i := \check{M}_i$ et $N = N_0$. Nous définissons les entiers caractéristiques n_k du germe d'hypersurface comme étant les indices des M_{k-1} dans M_k :

$$n_k = [M_k : M_{k-1}].$$

Nous posons aussi $n_0 = 1$ et $n_{-1} = 0$. Nous notons

$$e_{k-1} = n_k \ldots n_g \text{ pour } k = 1, \ldots, g.$$

En particulier nous avons $e_0 = n = n_1 \ldots n_g$.

Nous pouvons aussi définir les vecteurs $\gamma(k)$ par :

$$\gamma(1) := a(1)$$

$$\gamma(k+1) := n_k \gamma(k) + a(k+1) - a(k)$$

Dans le cas $m = 1$, ce sont les $n\gamma_i$ sont des générateurs du semi-groupe de l'ensemble des multiplicités d'intersection $(C, X)_0$ où C parcourt l'ensemble des germes en 0 de courbes planes non contenues dans X (cf. [**24**]).

2.2. Remarques sur l'écriture en coordonnées d'un arcs tracé sur un germe d'hypersurface irréductible à singularité quasi-ordinaire. — Soit $\varphi(t) := (x_1(t), \ldots, x_m(t), y(t))$ un arc tracé sur un germe $(X, 0)$ d'hypersurface irréductible à singularité quasi-ordinaire d'exposants caractéristiques $a(1), \ldots, a(g)$ défini par un polynôme de Weierstrass $f \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_m\}[Y]$. Alors $f(x_1(t), \ldots, x_m(t), y(t)) = 0$, donc $y(t) = \xi(x^{1/n}(t))$ où $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_g$ est une racine de f (avec les notations du théorème 2.2) et les $x_i^{1/n}(t)$ sont des racines n-ièmes de $x_i(t)$ dans $\mathbb{C}[[t^{1/n}]]$. Nous noterons souvent ξ au lieu de $\xi(x^{1/n}(t))$ quand les racines n-ièmes de $x_i(t)$ seront fixées.

Nous pouvons alors faire les deux remarques suivantes :

Remarque 2.5. — Soit $X^a = X_1^{a_1} \ldots X_m^{a_m}$ un monôme de $\mathbb{C}[X_1^{1/n}, \ldots, X_m^{1/n}]$. Considérons m séries $x_i(t) = \sum_k x_{i,k} t^k$ de $\mathbb{C}[[t]]$, et notons $l_i = \operatorname{ord}(x_i(t))$. Le choix d'une racine n-ième de $x_i(t)$ dans $\mathbb{C}[[t^{1/n}]]$ dépend uniquement du choix d'une racine n-ième de x_{i,l_i} dans $\mathbb{C}$. Pour tout i fixons une racine n-ième de x_{i,l_i} et notons la $x_{i,l_i}^{1/n}$. Nous noterons alors sans équivoque $x_{i,l_i}^{a_i} = (x_{i,l_i}^{1/n})^{na_i}$. Dans ce cas nous avons

$$x_i(t)^{a_i} = x_{i,l_i}^{a_i} t^{a_i l_i} \left(1 + \sum_{k \geq l_i+1} \frac{x_{i,k}}{x_{i,l_i}} t^{k-l_i}\right)^{a_1} = x_{i,l_i}^{a_i} t^{a_i l_i} \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{x_{i,k+l_i}}{x_{i,l_i}} t^{k}\right)^{a_1}$$

$$= x_{i,l_i}^{a_i} t^{a_i l_i} \left(1 + a_i \sum_{k \geq 1} \frac{x_{i,k+l_i}}{x_{i,l_i}} t^{k} + \cdots + \binom{a_i}{j} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{x_{i,k+l_i}}{x_{i,l_i}} t^{k}\right)^{j} + \cdots \right)$$

avec $\binom{a_i}{j} := \frac{a_i(a_i-1)\ldots(a_i-j+1)}{j!}$. Nous voyons que $x_1^{a_1}(t)\ldots x_m^{a_m}(t)$ est dans $\mathbb{C}[[t]]$ si et seulement si $\sum_i a_i l_i \in \mathbb{N}$. Si tel est le cas, pour tout $c \in \mathbb{N}$ avec $c > \sum_i a_i l_i$, le coefficient de t^c dans l'expression de la série $x_1^{a_1}(t)\ldots x_m^{a_m}(t)$ est un polynôme de la forme suivante :

$$\prod_{i=1}^{m} x_{i,l_i}^{a_i} P\left(x_{i,k}/x_{i,l_i};\, l_i + 1 \leq k \leq c - \sum_j a_j l_j + l_i \text{ et } 1 \leq i \leq m\right)$$

où P est un polynôme quasi-homogène de poids $c - \sum_j a_j l_j$ et où $x_{i,k}/x_{i,l_i}$ est de poids $k - l_i$.

Définition 2.6. — Notons $b_k : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Q}$ la forme linéaire

$$b_k(\underline{l}) := \sum_{i=1}^{m} a_i(k) l_i, \ \forall k \in \{0, \ldots, g\}$$

et M l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} M : & \mathbb{Z}^m & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g \\ & (l_1, \ldots, l_m) & \longmapsto & (n\sum a_i(1) l_i, \ldots, n \sum a_i(g) l_i) \end{array}$$

Remarque 2.7. — Si l_i est l'ordre de $x_i(t)$, alors d'après le théorème 2.2, nous voyons que nécessairement $b_1(\underline{l}) \in \mathbb{N}$ et donc $\xi_1(x^{1/n}(t)) \in \mathbb{C}[[t]]$. En retranchant $\xi_1(x^{1/n}(t))$ à $y(t)$, nous voyons alors que $b_2(\underline{l}) \in \mathbb{N}$ et donc que $\xi_2(x^{1/n}(t)) \in \mathbb{C}[[t]]$. Par induction nous voyons que

$$(\mathrm{ord}(x_1(t)), \ldots, \mathrm{ord}(x_m(t))) \in \mathrm{Ker}\, M.$$

Inversement, si l'on se fixe m séries formelles en t, notées $x_i(t)$ pour $1 \leq i \leq m$, qui vérifient $(\mathrm{ord}(x_1(t)), \ldots, \mathrm{ord}(x_m(t))) \in \mathrm{Ker}\, M \cap (\mathbb{N}^*)^m$, alors pour toute solution ξ de f, nous avons $\xi(x^{1/n}(t)) \in \mathbb{C}[[t]]$, et $(x_1(t), \ldots, x_m(t), \xi(x^{1/n}(t)))$ définit un arc tracé sur $(X, 0)$.