382 ASTÉRISQUE

2016

ARITHMÉTIQUE p-ADIQUE DES FORMES DE HILBERT

Classicité de formes modulaires de Hilbert

Stéphane Bijakowski

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque
382, 2016, p. 49–71

CLASSICITÉ DE FORMES MODULAIRES DE HILBERT

par

Stéphane Bijakowski

Résumé. — Nous prouvons un résultat de classicité pour les formes modulaires de Hilbert surconvergentes. Nous utilisons pour démontrer ce résultat la méthode du prolongement analytique, initialement développée par Buzzard et Kassaei.

***Abstract* (Classicality of Hilbert modular forms).** — We prove in this paper a classicality result for overconvergent Hilbert modular forms. To get this result, we use the analytic continuation method, first used by Buzzard and Kassaei.

Introduction

Coleman [**3**] a prouvé qu'une forme modulaire surconvergente sur la courbe modulaire, de niveau iwahorique en p, de poids k entier, propre pour un certain opérateur de Hecke U_p, était classique si la pente, c'est-à-dire la valuation de la valeur propre pour l'opérateur de Hecke (normalisée de telle façon que $v(p) = 1$), était inférieure à $k-1$. Ce résultat a été obtenu grâce à une connaissance approfondie de la cohomologie rigide de la courbe modulaire. Des travaux de Buzzard [**2**] et de Kassaei [**11**], utilisant des techniques de prolongement analytique, ont donné une nouvelle démonstration de ce théorème. Ainsi, Buzzard a étudié la dynamique de l'opérateur de Hecke, et montré que ses itérés accumulaient le tube supersingulier dans un voisinage strict arbitrairement petit du lieu ordinaire multiplicatif. Une forme modulaire surconvergente étant définie sur un tel voisinage strict, l'équation $f = a_p^{-1} U_p f$ permet de prolonger f au tube supersingulier dès que la pente est non nulle.

La théorie du sous-groupe canonique a ensuite permis à Kassaei de décomposer l'opérateur de Hecke sur le lieu ordinaire-étale (et même sur un voisinage strict de celui-ci) en $U_p = U_p^{\text{good}} + U_p^{\text{bad}}$, où U_p^{good} paramètre les supplémentaires du sous-groupe universel ne rencontrant pas le sous-groupe canonique, et U_p^{bad} l'unique supplémentaire égal au sous-groupe canonique. L'opérateur U_p^{good} est à valeurs dans un voisinage strict du tube ordinaire-multiplicatif, donc agit sur les formes modulaires surconvergentes, alors que U_p^{bad} stabilise le lieu ordinaire-étale. Kassaei a alors défini une série f_n, approximant $a_p^{-n} U_p^n f$. Plus précisément, on a, lorsque cela a un sens, $f_n = a_p^{-n} U_p^n f - a_p^{-n} (U_p^{\mathrm{bad}})^n f$. La condition $v(a_p) < k-1$ implique alors que la norme de l'opérateur $a_p^{-1} U_p^{\mathrm{bad}}$ est strictement inférieure à 1, et donc que la série f_n converge sur le lieu ordinaire-étale. Cela permet donc d'étendre f à toute la courbe modulaire.

Ce résultat de classicité a été entendu aux formes modulaires de Hilbert par plusieurs auteurs. La méthode originale de Coleman, qui étudie la cohomologie de la courbe modulaire, a récemment été utilisée par Johansson [**10**] ainsi que par Tian et Xiao [**20**]. La méthode du prolongement analytique a été utilisée par Sasaki dans le cas où le nombre premier p est totalement décomposé [**17**], Tian [**19**] pour certains cas où p est non ramifié, et Pilloni-Stroh [**14**] pour le cas non ramifié général. Remarquons également que la méthode de prolongement analytique a été utilisée pour des variétés plus générales non ramifiées dans [**1**].

Nous étendons ici la méthode du prolongement analytique au cas général des formes modulaires de Hilbert. Soit F un corps totalement réel de degré d, et $(p) = \prod \pi_i^{e_i}$ la décomposition de l'idéal engendré par p dans O_F, l'anneau des entiers de F. On note également f_i le degré résiduel de π_i. Soit $\Sigma_i = \{\sigma \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}_p), v(\sigma(\pi_i)) > 0\}$; les ensembles Σ_i forment une partition de $\Sigma = \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}_p)$, et sont de cardinal $e_i f_i$. Le poids d'une forme modulaire de Hilbert est alors un caractère de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m$, que l'on peut voir comme un élément de $\mathbb{Z}^\Sigma$. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème. — *Soit f une forme de Hilbert surconvergente de niveau Iwahorique en p, de poids $\kappa = (k_\sigma)$, où σ parcours l'ensemble Σ. Supposons que f soit propre pour les opérateurs de Hecke U_{π_i}, de valeurs propres a_i, et que l'on ait pour tout i*

$$e_i(v(a_i) + f_i) < \inf_{\sigma \in \Sigma_i} k_\sigma.$$

Alors f est classique.

Parlons à présent de l'organisation du texte. Dans la partie 1, nous introduisons la variété de Hilbert, ainsi que les formes modulaires sur cette variété. Dans la partie 2, nous introduisons les opérateurs de Hecke, et introduisons des décompositions de ces opérateurs sur certaines zones. Nous démontrons le théorème de classicité dans la partie 3, et la partie 4 est consacrée à la construction de compactifications toroïdales, et au principe de Koecher.

L'auteur remercie le rapporteur pour sa relecture détaillée, ainsi que le programme ANR-14-CE25-0002 pour son support.

1. Variété et formes de Hilbert

1.1. L'espace de modules. — Soit F un corps totalement réel de degré $d \geq 2$; on note O_F son anneau des entiers, $O_F^\times$ le groupe des unités et $O_F^{\times,+}$ le sous-groupe des unités totalement positives. Soit p un nombre premier et $(p) = \prod_{i=1}^g \pi_i^{e_i}$ sa décomposition en idéaux premiers dans F. On notera f_i le degré résiduel de π_i, et $\pi = \prod_i \pi_i$. Soit F_{π_i} la complétion de F suivant l'idéal π_i, et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant la clôture normale des F_{π_i}. On notera O_K l'anneau des entiers de K. Un schéma abélien de Hilbert-Blumenthal (SAHB) sur un schéma S est un schéma abélien A sur S de dimension d muni d'un plongement $O_F \hookrightarrow \mathrm{End}(A)$. Soit $N \geq 3$ un entier premier à p.

Définition 1.1. — Soit δ la différente de F, $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de F. On note $\mathfrak{c}^+$ le cône des éléments totalement positifs. Soit $Y_\mathfrak{c} \to \mathrm{Spec} O_K$ l'espace de modules dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des (A, i, ϕ, H) avec :

- $\triangleright$ $A \to S$ un SAHB.
- $\triangleright$ $i : \delta^{-1} \otimes_\mathbb{Z} \mu_N \hookrightarrow A[N]$ est une structure de niveau μ_N.
- $\triangleright$ ϕ est une $\mathfrak{c}$-polarisation, c'est-à-dire que ϕ est un homomorphisme O_F-linéaire $\mathfrak{c} \to P(A)$, où $P(A)$ est l'ensemble des morphismes symétriques $f : A \to A^t$, tel que
  - ϕ envoie $\mathfrak{c}^+$ dans le cône des polarisations
  - ϕ induit un isomorphisme $A \otimes \mathfrak{c} \simeq A^t$.
- $\triangleright$ H est un sous-groupe de rang p^f de $A[\pi]$ stable par O_F, avec $f = \sum_i f_i$, tel que $H[\pi_i]$ soit de rang p^{f_i} pour tout i.

Comme $A[\pi] = \bigoplus_i A[\pi_i]$, on a $H = \bigoplus_i H_i$, avec $H_i = H[\pi_i]$. Pour tout i, H_i est un sous-groupe de rang p^{f_i} de $A[\pi_i]$, avec une action de $O_F/\pi_i \simeq \mathbb{F}_{p^{f_i}}$: c'est un schéma en $\mathbb{F}_{p^{f_i}}$-vectoriel de rang 1, c'est-à-dire un schéma en groupes de Raynaud.

D'après [**5**], on dispose d'un ouvert $Y_\mathfrak{c}^R \hookrightarrow Y_\mathfrak{c}$ qui est le lieu où le faisceau conormal ω_A du SAHB universel est un $O_F \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{O}_{Y_\mathfrak{c}}$-module libre de rang 1 (c'est le lieu de Rapoport). Le complémentaire de cet ouvert est un fermé de codimension plus grande que 2 dans $Y_\mathfrak{c}$.

Pour définir les formes modulaires entières de poids général, nous aurons besoin de modifier la fibre spéciale de $Y_\mathfrak{c}$. Nous nous inspirons du modèle de Pappas-Rapoport [**12**], ainsi que de la construction faite dans [**18**]. Rappelons que le faisceau conormal de A en sa section unité est un $O_F \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{O}_{Y_\mathfrak{c}}$-module. Commençons par décrire la O_K-algèbre $O_F \otimes_\mathbb{Z} O_K$.

Notons $F_{\pi_i}^{nr}$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans F_{π_i}. Soit également $\Sigma_i = \mathrm{Hom}(F_{\pi_i}, \overline{K})$ et $S_i = \mathrm{Hom}(F_{\pi_i}^{nr}, \overline{K})$. Soit ϖ_i une uniformisante de F_{π_i}, et $E_i(u)$ le polynôme minimal de ϖ_i sur $F_{\pi_i}^{nr}$ (c'est un polynôme d'Eisenstein de degré e_i). Pour $\sigma \in S_i$, on notera $E_\sigma(u) = \sigma E_i(u)$; c'est un polynôme à coefficients dans O_K. Alors on a

$$O_F \otimes_\mathbb{Z} O_K = \bigoplus_{i=1}^g O_{F_{\pi_i}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_K = \bigoplus_{i=1}^g (O_{F_{\pi_i}}^{nr} \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_K)[u]/E_i(u) = \bigoplus_{i=1}^g \bigoplus_{\sigma \in S_i} O_K[u]/E_\sigma(u).$$

Si S est un O_K-schéma, et $A \to S$ un SAHB, alors on peut décomposer le faisceau ω_A en

$$\omega_A = \bigoplus_{i=1}^g \bigoplus_{\sigma \in S_i} \omega_{A,\sigma}$$

où $\omega_{A,\sigma}$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang e_i muni d'une action de $O_K[u]/E_\sigma(u)$, pour tout i et $\sigma \in S_i$.

Pour $\sigma \in S_i$, notons $\sigma_1, \dots, \sigma_{e_i}$ les éléments de Σ_i dont la restriction à $F_{\pi_i}^{nr}$ est σ.

Définition 1.2. — Soit $X_{\mathfrak{c}}$ l'espace de modules sur O_K dont les S-points sont les couples $(A, i, \phi, H, (\omega_{A,\sigma,j})_{i,\sigma \in S_i, 0 \leq j \leq e_i})$ avec

- ▷ $(A, i, \phi, H) \in Y_{\mathfrak{c}}(S)$
- ▷ Pour tout i et $\sigma \in S_i$, le faisceau $\omega_{A,\sigma}$ est muni de la filtration

$$0 = \omega_{A,\sigma,0} \subset \omega_{A,\sigma,1} \subset \cdots \subset \omega_{A,\sigma,e_i} = \omega_{A,\sigma}$$

tel que

- pour tout j, $\omega_{A,\sigma,j}$ est localement un $\mathcal{O}_S$-facteur direct stable par O_F de $\omega_{A,\sigma}$ de rang j.
- pour tout $1 \leq j \leq e_i$, $\omega_{A,\sigma,j}/\omega_{A,\sigma,j-1}$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang 1, et l'action de O_F sur ce module se factorise par $O_F \to O_{F_{\pi_i}} \xrightarrow{\sigma_j} O_K \to \mathcal{O}_S$.

Le foncteur $X_{\mathfrak{c}}$ est représentable par un schéma, que l'on notera encore $X_{\mathfrak{c}}$ (**[18]**). On dispose d'un morphisme d'oubli $X_{\mathfrak{c}} \to Y_{\mathfrak{c}}$, qui est surjectif. Au-dessus du lieu de Rapoport, c'est un isomorphisme ; en particulier, on a $X_{\mathfrak{c}} \otimes_{O_K} K \simeq Y_{\mathfrak{c}} \otimes_{O_K} K$.

Soit $Cl(F)^+$ le quotient des idéaux fractionnaires par les idéaux engendrés par les éléments totalement positifs, et $\{\mathfrak{c}_i\}$ un ensemble de représentants premiers à p. On note $X = \coprod_i X_{\mathfrak{c}_i}$. On notera $X_K = X \times K$, $\mathfrak{X}$ la complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale, et X_{rig} la fibre générique rigide de $\mathfrak{X}$.

Remarque 1.3. — Le schéma $X_{\mathfrak{c}}$ diffère de $Y_{\mathfrak{c}}$ par un éclatement. En effet, le morphisme $X_{\mathfrak{c}} \to Y_{\mathfrak{c}}$ est birationnel (c'est un isomorphisme au-dessus du lieu de Rapoport), et d'après **[4]**, un morphisme projectif birationnel entre schémas quasi-projectifs intègres noethériens est un éclatement. De plus, le sous-schéma fermé relatif à cet éclatement est contenu dans le complémentaire du lieu de Rapoport, donc en particulier dans la fibre spéciale de $Y_{\mathfrak{c}}$. Si on note $X_{\mathfrak{c},\mathrm{rig}}$ et $Y_{\mathfrak{c},\mathrm{rig}}$ les espaces rigides associés respectivement à $X_{\mathfrak{c}}$ et $Y_{\mathfrak{c}}$, on en déduit donc que $X_{\mathfrak{c},\mathrm{rig}} \simeq Y_{\mathfrak{c},\mathrm{rig}}$.

Remarque 1.4. — Nous aurions pu ajouter dans la définition de $X_{\mathfrak{c}}$ une condition de filtration pour le faisceau ω_H (ce qui est fait dans **[18]**). Nous aurions obtenu un espace plus régulier, mais notre définition est suffisante dans notre cadre.

Dans **[8]**, Fargues a défini une fonction degré pour les schémas en groupes finis et plats définis sur l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Nous utilisons cette fonction pour décrire l'espace rigide X_{rig}.

Définition 1.5. — On définit la fonction Deg : $X_{\mathrm{rig}} \to \prod_{i=1}^{g} [0, f_i]$ par

$$\mathrm{Deg}(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}) = (\deg\, H_i)_{1 \leq i \leq g}$$

où deg est la fonction définie par Fargues dans **[8]**.