Astérisque
323, 2009, p. 397–429

ÉQUATIONS AUX q-DIFFÉRENCES ET FIBRÉS VECTORIELS HOLOMORPHES SUR LA COURBE ELLIPTIQUE $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$

par

Jacques Sauloy

Résumé. — Nous présentons diverses applications des fibrés vectoriels aux équations aux q-différences, dans la lignée de la correspondance de Weil.

Abstract **(Equations in q-differences and holomorphic vector bundles over the elliptic curve $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$)**

We present some applications of vector bundles to q-difference equations, in continuation of Weil's correspondence.

1. Introduction

Divers fils mathématiques et historiques relient les équations aux q-différences aux *fibrés vectoriels holomorphes sur une courbe elliptique* [1]. Ces dernières années, ces derniers sont apparus à plusieurs reprises comme un cadre naturel pour des problèmes de classification et de théorie de Galois (problème de Riemann-Hilbert). Il est peut-être temps de survoler et de mettre en ordre des résultats épars, dont certains ont été énoncés dans diverses conférences (Groningen, Conférence Ramis, Lisbonne, Luminy, Kyoto, Tordesillas) mais n'ont jamais été publiés. Ces résultats ont été très largement motivés par les travaux de Ramis, Zhang et l'auteur et l'une des raisons de non publication est le blocage sur une question difficile, celle du « problème global » (section 4). Cependant les percées des dernières années sur le problème local ([**28**], [**24**] et [**25**]) nous encouragent.

L'article comprend peu de résultats extraordinaires mais permet un éclairage nouveau de la théorie. Il permet en particulier de proposer une énigme (apparition de la dualité de Serre) et un problème ouvert (le problème global mentionné ci-dessus).

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 39A13; 34M40, 32G34.
Mots clefs. — Correspondance de Weil, équations aux q-différences, fibrés vectoriels, courbes elliptiques.

[1] Dans tout le texte, nous dirons « fibré » pour « fibré vectoriel holomorphe » (sur une surface de Riemann).

Nous n'évoquons pas deux autres pistes, celle de la *confluence* ([**33**], [**34**]) et celle des *déformations isomonodromiques* ([**37**]).

Nous nous occupons principalement d'équations aux q-différences et ne sommes venus aux fibrés vectoriels que par nécessité : nous ne prétendons à aucune expertise dans ce domaine, et espérons au contraire que les spécialistes nous apporteront leurs lumières.

Ce fut un plaisir tout particulier de parler de tout cela à la conférence en l'honneur de José-Manuel Aroca, Gran Jefe Capitán Pirata, en présence de tant d'amis de Valladolid et d'ailleurs. À Valladolid et à Tordesillas, on rit beaucoup avant, pendant et après les exposés (parfois, à la place) parce que le plaisir de faire des mathématiques s'y exprime plus librement qu'ailleurs. Merci pour tout cela à Jose-Manuel, l'âme du groupe.

J'avais préfacé mon exposé (en anglais) à Tordesillas de la dédicace suivante :

With a special thought for Jean Giraud,
who, a long time ago, guided my first steps
into the wild world of singularities ...

Jean Giraud, qui n'avait pu assister à la conférence, nous a quittés le 27 mars. Je partage ici ma tristesse avec nos amis espagnols.

1.1. Apparition des fibrés dans la théorie des équations fonctionnelles. — Le théorème clé dans la résolution par Birkhoff du problème de Riemann-Hilbert ([**3**]) est un théorème de factorisation de matrice holomorphe. Dans [**30**], [**31**], Röhrl a interprété ce théorème en termes de *trivialité de fibré vectoriel* (voir aussi [**10**]). Dans [**23**], van der Put et Singer donnent de cette factorisation une preuve moderne, qui s'appuie directement sur la cohomologie des fibrés vectoriels sur une surface de Riemann, et l'appliquent (dans la droite ligne de [**3**]) aux équations aux différences et aux q-différences. Auparavant, Praagman, un élève de van der Put, avait invoqué la trivialité méromorphe des fibrés pour démontrer l'existence d'un système fondamental de solutions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ pour les équations aux différences et aux q-différences ([**20**]). Cependant, dans tous ces cas, les fibrés n'interviennent qu'à travers leurs propriétés cohomologiques, et non en tant qu'objets géométriques.

Dans [**2**], Baranovsky et Ginzburg étudient la classification formelle des équations aux q-différences fuchsiennes (dans une autre terminologie, liée aux groupes de lacets). Ils caractérisent chaque classe *formelle* à l'aide d'un objet *analytique*, un fibré vectoriel sur la courbe elliptique $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. Sur une suggestion de Kontsevitch, ils en déduisent le groupe de Galois local. Indépendamment, l'auteur a obtenu dans [**34**] la classification (formelle ou analytique, ce qui revient au même dans ce cas) des équations aux q-différences fuchsiennes par des fibrés plats, d'où se déduit la description complète du groupe de Galois local et celle moins détaillée du groupe de Galois global (cas abélien régulier).

Nous allons, dans cette introduction, suivre le chemin inverse et montrer comment la description des fibrés sur une courbe (resp. une courbe elliptique) se traduit naturellement en termes d'équations fonctionnelles (resp. d'équations aux q-différences).

1.1.1. *La correspondance de Weil.* — Dans [**41**], Weil propose, sous le nom de G-diviseurs, une généralisation non-abélienne de la notion de diviseur sur une surface de Riemann. Ces G-diviseurs ne sont autres que des fibrés vectoriels avant la lettre. Selon la présentation « moderne » de [**14**] (et sous une forme simplifiée), cela donne ce qui suit.

1.1.1.1. *Fibrés équivariants.* — Soit E une surface de Riemann, et soit $\tilde{E}$ son revêtement universel, qui est donc également une surface de Riemann. Nous noterons $\pi : \tilde{E} \to E$ la projection canonique.

Soit $\mathscr{F}$ un fibré (vectoriel holomorphe) sur E. En relevant $\mathscr{F}$ à $\tilde{E}$ par π, on obtient un fibré $\tilde{\mathscr{F}} = \pi^* \mathscr{F}$, qui est trivial puisque $\tilde{E}$ est simplement connexe. On écrit donc $\tilde{\mathscr{F}} = \tilde{E} \times V$, où V est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Provenant de E, ce fibré trivial est muni d'une *action équivariante* du groupe $G = \mathrm{Aut}(\tilde{E}/E) = \pi_1(E)$ (nous ne précisons pas le point-base pour le groupe fondamental π_1, qui n'apparaitra qu'en tant que groupe des automorphismes du revêtement). Le mot « action équivariante » signifie ici « action sur $\tilde{E} \times V$ qui commute avec l'action sur $\tilde{E}$ » (on dit aussi que $\tilde{\mathscr{F}}$ est un fibré équivariant). Une telle action est complètement décrite par l'action naturelle $(\gamma, x) \mapsto \gamma.x$ de G sur $\tilde{E}$ et par la donnée d'une application holomorphe (en la seconde variable) :

$$A : G \times \tilde{E} \longrightarrow \mathscr{GL}(V).$$

Tout $\gamma \in G$ opère alors sur $\tilde{\mathscr{F}} = \tilde{E} \times V$ par l'application :

$$(x, X) \mapsto (\gamma.x, A(\gamma, x)X)\,.$$

Pour que ce soit bien une opération de groupe, il faut, et il suffit, que soit réalisée une condition de cocycle :

$$\forall \gamma, \gamma' \in G\ ,\ \forall x \in \tilde{E}\ ,\ A(\gamma'\gamma, x) = A(\gamma', \gamma.x)A(\gamma, x).$$

On peut également exprimer, par une condition de cobord, la trivialité du fibré $\mathscr{F}$ de départ ou, plus généralement, à quelle condition deux cocycles représentent des fibrés isomorphes.

Un morphisme $\mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ de fibrés sur E se relève en un morphisme $\tilde{\mathscr{F}} = \tilde{E} \times V \to \tilde{\mathscr{F}}' = \tilde{E} \times V'$ de fibrés sur $\tilde{E}$ compatible avec la structure ci-dessus : si $\tilde{\mathscr{F}}$ et $\tilde{\mathscr{F}}'$ sont respectivement décrits par les cocycles A et A', le morphisme $\tilde{\mathscr{F}} \to \tilde{\mathscr{F}}'$ est de la forme $(x, X) \mapsto (x, F(x)X)$, où F est une application holomorphe de $\tilde{E}$ dans $\mathscr{L}(V, V')$, qui satisfait à la condition suivante :

$$\forall \gamma \in G\ ,\ \forall x \in \tilde{E}\ ,\ F(\gamma.x)A(\gamma, x) = A'(\gamma, x)F(x).$$

1.1.1.2. *Description géométrique.* — Supposons réciproquement donné le cocycle holomorphe (en la seconde variable) $A : \pi_1(E) \times \tilde{E} \to \mathcal{GL}(V)$. On lui associe la relation d'équivalence $\sim_A$ sur le fibré trivial $\tilde{F} = \tilde{E} \times V$ engendrée par les relations : $(x, X) \sim_A (\gamma.x, A(\gamma, x)X)$: la relation $\sim_A$ provient donc d'une action équivariante de $\pi_1(E)$ sur $\tilde{E}$. En un sens évident, cette relation est compatible avec la relation $\sim$ sur $\tilde{E}$ induite par l'action de $\pi_1(E)$. Le fibré sur E associé, que nous noterons $\tilde{F}_A$, s'obtient par passage au quotient de la projection $\tilde{F} = \tilde{E} \times V \to \tilde{E}$ par ces relations d'équivalence :

$$\mathcal{F}_A = \frac{\tilde{E} \times V}{\sim_A} \longrightarrow E = \frac{\tilde{E}}{\sim}\cdot$$

On peut alors décrire le faisceau des sections de $\mathcal{F}_A$. Soit V un ouvert de E. Alors l'espace des sections de $\mathcal{F}_A$ sur V est :

$$\Gamma(V, \mathcal{F}_A) = \{X : \pi^{-1}(V) \to V \text{ holomorphes } \mid \\ \forall x \in \pi^{-1}(V) \ , \ \forall \gamma \in \pi_1(E) \ , \ X(\gamma.x) = A(\gamma, x)X(x)\}.$$

Exemple. — Prenons $E = \mathbf{C}^*$. Alors $\tilde{E} = \mathbf{C}$ sur lequel $\pi_1(E) = \mathbf{Z}$ agit par translations, et la projection canonique $\pi : \tilde{E} \to E$ est ici $x \mapsto e^{2i\pi x}$. La condition de cocycle entraine que A est entièrement déterminée par la matrice $A(1, x)$. Notons (abusivement) $A(x) = A(1, x)$. De même, la condition qui définit les sections peut se tester simplement en prenant $\gamma = 1$:

$$\Gamma(V, \mathcal{F}_A) = \{X : \pi^{-1}(V) \to V \text{ holomorphes } \mid \forall x \in \pi^{-1}(V) \ , \ X(x+1) = A(x)X(x)\}.$$

On voit bien la parenté avec les équations fonctionnelles.

Si l'on note $\underline{1} = \mathcal{F}_1$ (« objet unité ») le fibré en droites trivial sur E, associé au cocycle trivial $(\gamma, x) \mapsto 1 \in \mathcal{GL}(\mathbf{C})$, le lecteur pourra vérifier que les morphismes de $\underline{1}$ dans un fibré $\mathcal{F}_A$ quelconque s'identifient aux sections globales de $\mathcal{F}_A$.

1.1.1.3. *Fibrés plats et représentations de* $\pi_1(E)$. — Un cas important est celui où, à isomorphisme près, on peut supposer $A(\gamma, x)$ indépendant de $x \in \tilde{E}$: on l'écrit donc $A(\gamma)$, et la condition de cocycle dit alors que $\gamma \mapsto A(\gamma)$ est une représentation de $\pi_1(E)$ dans $\mathcal{GL}(V)$. Un tel fibré est appelé *plat* ([**16**]). Les fibrés plats admettent une caractérisation topologique : les classes de Chern sur leurs facteurs indécomposables sont nulles ; et une caractérisation différentielle : on peut les munir d'une connexion holomorphe. *Nous n'aurons pas l'usage de ces caractérisations* [(2)]. On obtient ainsi la célèbre *correspondance de Weil* entre fibrés plats et représentations du groupe fondamental.

Il faut cependant prendre garde que cette correspondance n'est pas une équivalence entre la catégorie des fibrés plats sur E et celle des représentations de $\pi_1(E)$. Soient en effet $A : \pi_1(E) \to \mathcal{GL}(V)$ et $A' : \pi_1(E) \to \mathcal{GL}(V')$ deux telles représentations, et soient $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{F}_{A'}$ les fibrés plats qui leur correspondent respectivement. Un morphisme de

[(2)] Van der Put et Reversat utilisent la seconde dans [**22**], voir là-dessus la section 2.2.

$\mathcal{F}_A$ dans $\mathcal{F}_{A'}$ est décrit comme une application holomorphe $F : \tilde{E} \to \mathcal{L}(V, V')$, telle que :

$$\forall \gamma \in G \ , \ \forall x \in \tilde{E} \ , \ F(\gamma.x)A(\gamma) = A'(\gamma)F(x).$$

Si F est constant sur $\tilde{E}$, c'est bien un morphisme de représentations, mais pas autrement. Nous en verrons un exemple à la section suivante, et des conséquences pour le groupe de Galois à la section 2.1.1.

1.1.2. *Le cas des fibrés sur une courbe elliptique*

1.1.2.1. *Fibrés sur* $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$. — Prenons pour E la courbe elliptique [(3)] $\mathbf{C}/\Lambda_\tau$, où $\operatorname{Im}\tau < 0$ et $\Lambda_\tau = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$. (Nous poserons plus loin $q = e^{2\mathrm{i}\pi\tau}$ et voudrons avoir $|q| > 1$.) Ici, $\pi_1(E) = \Lambda_\tau$ agit sur $\tilde{E} = \mathbf{C}$ par translations. Notons encore $\pi : \mathbf{C} \to E$ la projection canonique. Pour tout cocycle A, notons $A_1(x) = A(1, x)$ et $A_\tau(x) = A(\tau, x)$. À cause de la relation de commutation $\tau + 1 = 1 + \tau$, la condition de cocycle entraine :

$$\forall x \in \mathbf{C} \ , \ A_\tau(x+1)A_1(x) = A_1(x+\tau)A_\tau(x).$$

Réciproquement, deux applications holomorphes de $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{GL}(V)$ qui vérifient cette relation s'étendent de manière unique en un cocycle A et définissent donc un fibré $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$ sur E. Les sections de ce fibré sur l'ouvert $V \subset E$ s'identifient aux solutions holomorphes sur $\pi^{-1}(V) \subset \mathbf{C}$ de l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \pi^{-1}(V) \ , \ X(x+1) = A_1(x)X(x) \quad \text{et} \quad X(x+\tau) = A_\tau(x)X(x).$$

Si $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{A'}$ est le fibré défini par A'_1 et A'_τ (holomorphes de $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{GL}(V')$), un morphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$ est représenté par une application holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{L}(V, V')$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{C} \ , \ F(x+1)A_1(x) = A'_1(x)F(x) \quad \text{et} \quad F(x+\tau)A'_\tau(x) = A_\tau(x)F(x).$$

Le fibré $\mathcal{F}_A$ est plat si, à isomorphisme près, on peut supposer que A_1 et A_τ ne dépendent pas de x : $A_1, A_\tau \in \mathcal{GL}(V)$. La condition de cocycle dit alors que ces deux matrices commutent. La représentation de $\pi_1(E) = \Lambda_\tau$ associée à $\mathcal{F}_A$ par la correspondance de Weil est celle définie par $1 \mapsto A_1$ et $\tau \mapsto A_\tau$.

1.1.2.2. *Fibrés sur* $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. — Pour trivialiser le fibré $\mathcal{F}$ sur E, il n'est cependant pas nécessaire de le relever au revêtement universel $\mathbf{C}$. Ce revêtement se factorise en $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}/\Lambda_\tau$. Or, l'application $x \mapsto z = e^{2\mathrm{i}\pi x}$ permet d'identifier $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ à la surface de Riemann ouverte $\mathbf{C}^*$. La même application permet d'identifier $E = \mathbf{C}/\Lambda_\tau$ à $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$, où $q = e^{2\mathrm{i}\pi\tau}$ est un nombre complexe arbitraire de module $|q| > 1$. On peut alors relever le fibré $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{E}_q$ en un fibré sur $\mathbf{C}^*$ par le revêtement $\mathbf{C}^* \to \mathbf{E}_q$. L'interêt de cette opération est que tout fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann ouverte (*i.e.* non compacte) est trivial ([**15**], théorème 3 p. 184).

Le formalisme des fibrés équivariants décrit à la section 1.1.1 s'applique alors tout aussi bien ici. Nous partirons donc maintenant de la description « de Jacobi » (ou

---

[(3)] *A priori*, la surface de riemann E devrait être appelée « tore complexe », mais l'on sait que c'est essentiellement la même chose qu'une courbe elliptique.