Astérisque
330, 2010, p. 61–153

(φ, Γ)-MODULES ET REPRÉSENTATIONS DU MIRABOLIQUE DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

par

Pierre Colmez

Résumé. — On construit des foncteurs $D \mapsto D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, de la catégorie des (φ, Γ)-modules étales dans celle des représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Dans le cas du (φ, Γ)-module trivial, le module $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ s'interprète naturellement comme l'espace des mesures bornées sur $\mathbf{Q}_p$. En traduisant, en termes de (φ, Γ)-modules, les opérations élémentaires sur les mesures (multiplication par une fonction continue, image directe par un difféomorphisme local), on munit le module $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ d'opérations analytiques. Toutes ces constructions jouent un grand rôle dans l'établissement de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Enfin, on démontre une loi de réciprocité explicite qui généralise celle de Perrin-Riou et intervient dans l'exploration des liens entre les correspondances de Langlands locales p-adique et classique (pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

***Abstract* ((φ, Γ)-modules and representations of the mirabolic of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).** — This paper is devoted to the construction of functors $D \mapsto D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ and $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ from the category of étale (φ, Γ)-modules to that of representations of the mirabolic subgroup of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. If D is the trivial (φ, Γ)-module, $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ is naturally isomorphic to the space of bounded measures on $\mathbf{Q}_p$. Translating in terms of (φ, Γ)-modules the usual operations on measures (multiplication by a continuous function, pushforward by a local diffeomorphism) endow $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ with analytic operations. All these constructions play an important rôle in the definition of the p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Finally, we prove an explicit reciprocity law generalizing that of Perrin-Riou, which is used in the comparison between the classical and p-adic local Langlands correspondences (for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Introduction

Notations générales. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de $\mathbf{Q}_p$. On note $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique ; il induit un isomorphisme de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on note $\sigma_a \in \Gamma$ l'élément défini par $\chi(\sigma_a) = a$. On note $\mathscr{H}$ le noyau de χ et $\mathscr{H}'$ le

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11S**.
Mots clefs. — (φ, Γ)-modules, loi de réciprocité.

groupe de Galois absolu de l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}_p$ (on a $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$). Enfin, soit $\Gamma^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p)$. Alors $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H}'$ est l'abélianisé $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, les groupes Γ et Γ^{nr} s'identifient aux sous-groupes de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ fixant $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ respectivement, et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} = \Gamma \times \Gamma^{\mathrm{nr}}$.

On fixe[(1)] aussi une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, et on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau des séries de Laurent $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$, à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ et vérifiant $\lim_{k\to-\infty} a_k = 0$. On note $k_{\mathscr{E}} = k_L((T))$ le corps résiduel de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$ son corps des fractions. Enfin, on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ le sous-anneau $\mathscr{O}_L[[T]]$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $k_{\mathscr{E}}^+ = k_L[[T]]$ l'anneau des entiers de $k_{\mathscr{E}}$, et on pose $\mathscr{E}^+ = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{p}]$.

On munit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, $k_{\mathscr{E}}$, $k_{\mathscr{E}}^+$ et $\mathscr{E}$ d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de Γ et du frobenius φ, respectant les structures d'anneaux, en envoyant T sur $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Ces actions commutent entre elles.

On rappelle que :

– la *transformée d'Amice* $\mu \mapsto A_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mu$ induit un isomorphisme $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L) \cong \mathscr{E}^+$ où $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$ est l'espace des L-mesures sur $\mathbf{Z}_p$ (i.e. le dual de l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$).

– l'application $f \mapsto \phi_f$ induit un isomorphisme $\mathscr{E}/\mathscr{E}^+ \cong \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, où $\phi_f(x)$ est, si $x \in \mathbf{Z}_p$, le résidu en 0 de la forme différentielle $(1+T)^x f(T) \frac{dT}{1+T}$,

Cadre général. — On dispose, grâce à Fontaine [**17**], d'une équivalence de catégories entre les (φ, Γ)-modules étales et les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Dans cet article, on construit un certain nombre de foncteurs associant à un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ ou sur $\mathscr{E}$ des objets de nature diverse. En vue de la correspondance de Langlands locale p-adique, les foncteurs les plus importants sont les foncteurs $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (pour un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$) et $D \mapsto (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ (pour un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$) associant à un (φ, Γ)-module étale une représentation du mirabolique $P(\mathbf{Q}_p) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right),\ a \in \mathbf{Q}_p^*,\ b \in \mathbf{Q}_p \right\}$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si V est une L-représentation irréductible de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et si D et Π sont respectivement le (φ, Γ)-module et la représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui lui sont associés, alors $(\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, où $\check{D}$ est le dual de Tate de D, est naturellement isomorphe, en tant que représentation de $P(\mathbf{Q}_p)$, au dual de Π. Les th. 0.4 et 0.6 ci-dessous, dont des cas particuliers peuvent se trouver dans [**3, 4, 12**] permettent respectivement de montrer que Π est irréductible et que la correspondance $V \mapsto \Pi$ est injective.

Les foncteurs $D \mapsto D^\natural$ et $D \mapsto D^\sharp$. — La construction du foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et son étude passent par l'introduction d'un certain nombre de foncteurs intermédiaires

(1) On se permet parfois de remplacer L par une extension finie ; L est donc variablement fixe...

qui ont leur intérêt propre. La plupart des résultats de ce paragraphe étaient connus de Fontaine[(2)] ([**18**], non rédigé).

Construction de sous-modules d'un (φ, Γ)*-module.* — Un (φ, Γ)-module étale est muni d'un opérateur ψ (dans la théorie des équations différentielles p-adiques, cet opérateur est « le ψ de Dwork »), qui est un inverse à gauche de φ et commute à l'action de Γ. Cet opérateur joue un grand rôle dans l'étude [**20, 21**], via les (φ, Γ)-modules, de la cohomologie galoisienne des représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$; en particulier, le module $D^{\psi=1}$ est, d'après un résultat de Fontaine (non publié mais voir [**7**]), naturellement isomorphe au module d'Iwasawa intervenant dans la construction des fonctions L p-adiques à la Perrin-Riou.

Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on définit ses sous-$\mathscr{O}_L$-modules suivants :
- $D^+ = \{z \in D,\ (\varphi^n(z))_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée dans } D\}$,
- $D^{++} = \{z \in D,\ \varphi^n(z) \to 0,\ \text{quand } n \to +\infty\}$,
- $D^{\rm nr}$ l'intersection des $\varphi^n(D)$, pour $n \in \mathbf{N}$,
- $D^\natural$ le plus petit sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D stable par ψ et engendrant D,
- $D^\sharp$ le plus grand sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D stable par ψ, sur lequel ψ est surjectif.

Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, on définit les L-espaces vectoriels D^+, D^{++} et $D^{\rm nr}$ comme ci-dessus, et pour définir $D^\natural$ et $D^\sharp$, on remplace « sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact » par « sous-$\mathscr{E}^+$-module localement compact », ce qui revient à choisir un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau Δ de D stable par φ et Γ et à poser $D^\sharp = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Delta^\sharp$ et $D^\natural = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Delta^\natural$. (On a aussi $D^+ = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Delta^+$, $D^{++} = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Delta^{++}$ et $D^{\rm nr} = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Delta^{\rm nr}$.)

Le module trivial. — Si $D = \mathscr{E}$, on a $D^+ = D^\natural = \mathscr{E}^+$, $D^{++} = T\mathscr{E}^+$, $D^{\rm nr} = L$ et $D^\sharp = T^{-1}\mathscr{E}^+$. Comme $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{E}/\mathscr{E}^+$ s'identifient respectivement aux espaces $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$ des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ et $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$, on voit que D^+ et $D/D^\natural$ sont en dualité dans le cas du module trivial.

Principales propriétés. — L'opérateur φ a tendance à augmenter les dénominateurs en T (sur $k_{\mathscr{E}}$, il les multiplie par p puisque $\varphi(T) = T^p$ modulo p), et son inverse à gauche ψ a tendance à les diminuer, ce qui explique pas mal des propriétés des modules définis ci-dessus.

– On a les inclusions $D^{++} \subset D^+ \subset D^\natural \subset D^\sharp$.

– On a $D^+ = D^{\rm nr} \oplus D^{++}$. Par ailleurs, si V est la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ associée à D via l'équivalence de catégories de Fontaine, alors

$$D^{\rm nr} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V^{\mathscr{H}'})^{\Gamma^{\rm nr}}.$$

(2) Je lui dois en particulier l'énoncé du (i) du th. 0.1.

On en déduit que D^{nr} est petit[3] : si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $\dim_{k_L}(k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} D^{\mathrm{nr}}) \leq \dim_{k_{\mathscr{E}}}(k_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D)$, et si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$, alors $\dim_L D^{\mathrm{nr}} \leq \dim_{\mathscr{E}} D$.

– Si D est de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors D^{++}, D^{+}, $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$ sont ouverts dans D. Par contre, si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, sans torsion, ou sur $\mathscr{E}$, alors D^{++} et D^{+} sont, en général, nuls[4], tandis que $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$ sont assez gros pour engendrer D.

– Comme on le voit sur l'exemple $D = \mathscr{E}$, un élément de $D^{\sharp}$ a peu de dénominateurs en T ; c'est dû au fait que ψ diminue les dénominateurs en T. Une des propriétés fondamentales de $D^{\sharp}$ est que l'action de ψ sur $D/D^{\sharp}$ est topologiquement nilpotente ; autrement dit, si D est de torsion, et si $x \in D$, alors $\psi^n(x) \in D^{\sharp}$, pour tout n assez grand. On voit aussi, sur cet exemple, que $D^{\sharp}/D^{\natural}$ est relativement petit, ce qui s'avère extrêmement précieux pour beaucoup de questions, le module le plus intéressant étant $D^{\natural}$, et celui le plus facile à manier étant $D^{\sharp}$ grâce à la propriété ci-dessus.

– Les modules ci-dessus sont tous stables par Γ. Les foncteurs qu'ils définissent n'ont pas de très bonnes propriétés d'exactitude. Le seul résultat non immédiat sur la définition est la surjectivité des applications $D_1^{\sharp} \to D_2^{\sharp}$ et $D_1^{\natural} \to D_2^{\natural}$ si $D_1 \to D_2$ est un morphisme surjectif de (φ,Γ)-modules.

Dualité. — Si D est un (φ,Γ)-module, on note $\check{D}$ son dual de Tate ; c'est un (φ,Γ)-module qui, en tant que $\mathscr{O}_L$-module, est naturellement isomorphe au dual topologique de D. L'opérateur ψ sur $\check{D}$ est alors l'adjoint de φ sur D, ce qui est à la base de la définition [**21**], en termes de (φ,Γ)-modules, de la dualité locale pour la cohomologie galoisienne. Le dual de Tate de $\check{D}$ est naturellement isomorphe à D.

Théorème 0.1. — *Soit D un (φ,Γ)-module de torsion.*

(i) *D^{+} et $\check{D}^{\natural}$ sont exactement orthogonaux ainsi que D^{++} et $\check{D}^{\sharp}$.*

(ii) *$\check{D}^{\sharp}$, $D^{\natural}$ et $\check{D}^{\sharp}/\check{D}^{\natural}$ sont les duaux respectifs de D/D^{++}, D/D^{+} et D^{nr}.*

Ce résultat ne s'étend pas aux (φ,Γ)-modules qui ne sont pas de torsion, mais on a quand même le résultat suivant dont on déduit que $D^{\sharp}/D^{\natural}$ est toujours assez petit (et même en général nul, si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$).

Corollaire 0.2. — (i) *Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$, alors $\check{D}^{\sharp}/\check{D}^{\natural}$ est le dual de D^{nr}.*

(ii) *Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $\check{D}^{\sharp}/\check{D}^{\natural}$ est le dual de $((\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)\otimes D)^{\mathrm{nr}}$.*

---

(3) Si D est irréductible, de dimension ≥ 2 sur $\mathscr{E}$, alors $V^{\mathscr{H}'} = 0$ et D^{nr} est plus que petit : il est nul !

(4) Si D^{+} engendre D, on dit que *D est de hauteur finie* (notion introduite dans [**17**], et étudiée dans [**2, 9, 26**] ; voir en particulier le th. D de [**2**].

Construction de représentations du mirabolique. — Soit P le sous-groupe mirabolique de $\mathbf{GL}_2$. On a donc $P(\mathbf{Q}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $P(\mathbf{Z}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Généralités. — Soit M un $\mathscr{O}_L$-module muni d'une action de $P(\mathbf{Z}_p)$ et d'un opérateur surjectif ψ commutant à $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et vérifiant $\psi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \psi(z)$, pour tous $z \in M$ et $b \in \mathbf{Z}_p$. Notons $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ l'ensemble des suites(5) $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de M, telles que $\psi(x^{(n+1)}) = x^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. On montre alors facilement que les formules suivantes définissent une action de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$:

(a) si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec $y^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;

(b) si $k \in \mathbf{Z}$, alors $\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec $y^{(n)} = x^{(n+k)}$, pour tout $n \geq -k$;

(c) si $b \in \mathbf{Q}_p$, alors $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec $y^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x^{(n)}$, pour tout $n \geq -v_p(b)$.

Si M est un L-espace vectoriel muni d'un $\mathscr{O}_L$-réseau M_0 stable par $P(\mathbf{Z}_p)$ et ψ, on note $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ le sous-L-espace vectoriel $L \otimes_{\mathscr{O}_L} (M_0 \boxtimes \mathbf{Q}_p)$ de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Supposons que M est muni d'une action du semi-groupe $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et pas seulement de $P(\mathbf{Z}_p)$, telle que ψ soit un inverse à gauche de $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et que les opérateurs $\mathrm{Res}_{i+p\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi \circ \psi \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pour $i \in \{0, \dots, p-1\}$, qui sont des projecteurs, soient orthogonaux deux à deux et que leur somme soit l'identité. Alors on peut définir, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$, un sous-module $M \boxtimes U$ de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et une application *de restriction à* U qui est un projecteur $\mathrm{Res}_U : M \boxtimes \mathbf{Q}_p \to M \boxtimes U$ vérifiant les propriétés suggérées par la notation (cf. exemple des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ ci-dessous). Dans ce cas, M s'identifie à $M \boxtimes \mathbf{Z}_p$ de (via $x \mapsto (\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$) et, via cette identification, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ devient l'application $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \mapsto x^{(0)}$.

Si M est un L-espace vectoriel, alors $M \boxtimes U \subset (M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$.

Mesures sur $\mathbf{Q}_p$. — Si $M = \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$, et si ψ est défini par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\, \psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(\frac{x}{p})\, \mu$, alors $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est l'espace des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ (i.e. le dual de l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p, L)_c$ des fonctions continues à support compact) muni de l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ définie par $\int_{\mathbf{Q}_p} \phi \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(ax+b)\, \mu$. L'espace $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est, quant à lui, l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, L)$ des mesures bornées(6) sur $\mathbf{Q}_p$ qui est le dual de l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

(5) Notons que la connaissance des $x^{(n)}$, pour $n \gg 0$, permet de reconstruire $x^{(n)}$ pour tout n en itérant ψ.

(6) Une mesure bornée sur $\mathbf{Q}_p$ est la même chose qu'une distribution globalement d'ordre 0 (cf. [**13**, n° II.5]).