Astérisque
323, 2009, p. 83–100

UNE PREUVE GALOISIENNE DE L'IRRÉDUCTIBILITÉ AU SENS DE NISHIOKA-UMEMURA DE LA PREMIÈRE ÉQUATION DE PAINLEVÉ

par

Guy Casale

À José Manuel Aroca pour son soixantième anniversaire

Résumé. — Cet article fait suite à un précédent. Nous utilisons le groupoïde de Galois calculé dans *loc. cit.* pour prouver que la première équation de Painlevé est irréductible au sens de Painlevé-Nishioka-Umemura. Pour cela nous prouvons que l'algèbre de Lie du groupoïde de Galois d'une équation réductible admet une suite croissante d'idéaux dont le premier est composé des champs tangents au feuilletage (donné par l'équation), le dernier est l'algèbre de Lie du groupoïde de Galois et les quotients de deux idéaux successifs sont de type linéaire. Ce n'est pas le cas pour P_1.

Abstract **(Galoisian proof of Nishioka-Umemura irreducibility of first Painlevé equation)**
This article follows a previous one. The Galois groupoid computed in *loc. cit.* is used to prove irreducibility in Painlevé-Nishioka-Umemura sense of the first Painlevé equation. We prove that the Lie algebra of the Galois groupoid of a reducible equation gets an increasing sequence of ideals such that: the first is the algebra of vector fields tangent to the foliation given by the equation, the last is the Lie algebra of the Galois groupoid, the quotient of two successive ideals is a Lie Algebra with linear type. This is not the case for P_1.

La question de l'irréductibilité d'une équation différentielle a été étudiée de manière approfondie par P. Painlevé depuis les *Leçons de Stokholm* [**19**]. Une première définition d'équation différentielle ordinaire réductible a été donnée par P. Painlevé et sera ensuite formalisée par K. Nishioka [**16**]. Une équation d'ordre n est dite réductible si on peut exprimer une solution rationnellement après avoir résolu successivement des équations différentielles linéaires, abéliennes (dont les solutions sont des fonctions abéliennes) ou d'ordre strictement plus petit que n.

Classification mathématique par sujets **(2010).** — 12H05, 34M55.
Mots clefs. — Équations différentielles, irréductibilité, groupoïde de Galois.

Ce travail a été financé par une bourse Marie-Curie (contrat EIF-025116-Diff. Galois Theory) puis partiellement par l'ANR (projet n° JC05_41465).

Après avoir étudié l'irréductibilité des équations du premier ordre, Painlevé se pose la question de l'irréductibilité de la première des équations d'ordre deux sans singularité mobile qu'il a découvertes :

$$(P_1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x.$$

Il prouve dans [**17**] qu'au moins une solution de cette équation est irréductible puis affirme dans [**18**] avoir déterminé le « groupe de rationalité de J. Drach » de cette équation et prouver ainsi son irréductibilité « absolue ». Le groupe de rationalité utilisé par P. Painlevé provient d'une tentative de J. Drach de mettre en place une théorie « de la rationalité » (ou « de Galois ») valide pour toute équation différentielle [**4**]. Malheureusement, les travaux de J. Drach sont entachés d'erreurs.

À la fin des années soixante-dix, l'école japonaise reprend et continue les travaux de Painlevé sur les équations sans singularité mobile. Une preuve de l'irréductibilité de P_1 est enfin obtenue par K. Nishioka [**16**] puis par H. Umemura [**23, 22**]. Récemment l'étude géométrique des variétés de conditions initiales des équations sans singularité mobile [**21**] a permis à M.-H. Saito et H. Terajima d'obtenir une autre preuve de l'irréductibilité de cette équation. Aucune de ces preuves n'utilise une « théorie de Galois générale ».

Ce type de théorie a été mis en place indépendamment par H. Umemura [**24, 25**] et B. Malgrange [**15**] à la fin du vingtième siècle, achevant les travaux de J. Drach et E. Vessiot ([**26, 27**]). Dans cet article nous présentons une nouvelle preuve de l'irréductibilité de la première équation de Painlevé utilisant le groupoïde de Galois de cette équation [**3, 15**]. Ce dernier a été calculé dans [**3**] en complétant les calculs de J. Drach [**5**]. La détermination du groupoïde de Galois permet de montrer différents types de résultats concernant la réductibilité ou l'irréductibilité d'une équation. L'irréductibilité au sens de Drach-Vessiot ainsi que l'irréductibilité au sens des feuilletages de P_1 ont été prouvées dans [**3**]. Nous expliquons ici les relations entre le groupoïde de Galois d'une équation et son irréductibilité au sens de Painlevé-Nishioka-Umemura dans le cas particulier de la première équation de Painlevé.

Cet article est constitué de six parties. Dans la première, nous rappelons les définitions d'irréductibilité et de modèles pour des corps différentiels. Nous étudions ensuite rapidement la géométrie transverse des feuilletages donnés par les types d'extensions utilisés pour « réduire » une équation. Dans la troisième partie nous rappelons la définition du groupoïde de Galois d'un feuilletage suivant B. Malgrange [**15**] et présentons ensuite quelques lemmes élémentaires dans une quatrième partie. Après avoir fait les rappels nécessaires sur les algèbres de Lie de champs de vecteurs formels, nous prouvons l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé.

Je remercie B. Malgrange dont les remarques ont permis d'améliorer grandement ce texte.

1. Définitions et modèles géométriques

Pour les notions de géométrie algébrique utilisées dans cet article, nous renvoyons le lecteur à **[9]** et pour celles d'algèbre différentielle à **[20]**. Commençons par rappeler la définition de réductibilité d'une équation différentielle du second ordre suivant Nishioka-Umemura **[16, 19, 22]**. Les corps différentiels (K, δ) seront toujours des corps de type fini sur $\mathbb{C}$ et auront pour corps de constantes $K^\delta = \mathbb{C}$.

Définition 1.1 **(réductibilité [16, 22])**. — *Soit (K, δ) un corps différentiel ordinaire et $E : \delta^2 y = F(y, \delta y) \in K(y, \delta y)$ une* équation différentielle du second ordre *sur K. L'équation E est dite* réductible *s'il existe une solution dans une extension différentielle L de K construite de la manière suivante :*

$$K = K_0 \subset K_1 \cdots \subset K_m = L$$

avec pour tout i,

- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension algébrique*,*
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension de Picard-Vessiot*, c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(f_j^p; 1 \leq p, j \leq n)$ avec $\delta f_j^p = \sum_k A_j^k f_k^p$, $A_j^k \in K_i$ et $K_i^\delta = K_{i+1}^\delta$.*
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension abélienne*, c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(\varphi_j(a_1, \ldots, a_n); 1 \leq j \leq n)$ les φ_j formant une base de transcendance du corps des fonctions d'une variété abélienne définie sur $\mathbb{C}$, les a_j appartenant à K_i et $K_i^\delta = K_{i+1}^\delta$,*
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension d'ordre un*, c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(z)$ avec $P(z, \delta z) = 0$, $P \in K_i(z, \delta z)$ et $K_i^\delta = K_{i+1}^\delta$.*

Une extension différentielle $K \subset L$ du type précédent sera dite réductrice*. Les extensions intermédiaires ($K_i \subset K_{i+1}$) décrites ci-dessus seront dites* élémentaires.

Dans la suite le corps différentiel de base sera $(\mathbb{C}(x), \frac{d}{dx})$. Nous allons décrire les modèles géométriques des extensions élementaires. Le corps $\mathbb{C}(x)$ sera le corps des fractions de la droite affine $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ et sa structure différentielle sera donnée par le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$.

Définition 1.2. — *Soient $\mathbb{C} \subset K$ une extension de corps de type fini et δ une dérivation de K. Un modèle pour l'extension différentielle (K, δ) de $\mathbb{C}$ est une variété algébrique affine Y sur $\mathbb{C}$ de corps de fractions K munie du champ de vecteurs δ_Y induit par δ.*

Soient $K \subset L$ une extension différentielle de type fini, (Y, δ_Y) et (Z, δ_Z) des modèles respectivement de K et de L. L'inclusion des corps donne une application rationnelle dominante $\pi : Z \dashrightarrow Y$ et la compatibilité des dérivations dit que le champ δ_Z est π-projetable d'image δ_Y.

Définition 1.3. — *Une application rationnelle $\varphi : Z \dashrightarrow Y$ entre variétés munies des champs de vecteurs respectifs δ_Z et δ_Y sera dite différentielle si $\overline{\varphi(Z)}$ est δ_Y-invariante et δ_Z est φ-projetable sur $\delta_Y|_{\overline{\varphi(Z)}}$*

Les applications différentielles entre modèles induites par les morphismes élémentaires seront appelées élémentaires. Voici une description succincte de ces applications.

Extensions algébriques. — En restriction à des ouverts convenables, elles correspondent aux applications finies étales $Z \to Y$. Le champ sur Y se relève de manière unique sur Z.

Extensions de Picard-Vessiot. — Ces applications se construisent à partir de (Y, δ_Y) en considérant le produit $Y \times GL_n(\mathbb{C})$ muni du champ de vecteurs

$$\delta_{Y \times GL_n(\mathbb{C})} = \delta_Y + \sum_{j,k,p} A_j^k g_k^p \frac{\partial}{\partial g_j^p}$$

où les g_j^p sont les coordonnées standard de $GL_n(\mathbb{C})$ et $(A_j^k) \in GL_n(\mathbb{C}(Y))$. Une extension de Picard-Vessiot est une sous-variété $\delta_{Y \times GL_n(\mathbb{C})}$-invariante minimale Z de $Y \times GL_n(\mathbb{C})$ telle que la projection induite de Z sur Y soit dominante. Par construction, cette projection est différentielle et il n'est pas difficile de montrer que l'extension de corps induite ne dépend pas du choix de Z.

Extensions abéliennes. — Soient Γ un réseau de $\mathbb{C}^n$ tel que $A = \mathbb{C}^n/\Gamma$ soit une variété abélienne, $\mathbb{C}(A)$ le corps des fonctions Γ-périodiques et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une base de transcendance de $\mathbb{C}(A)$ sur $\mathbb{C}$. Il existe des fonctions algébriques de n variables $F_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, telles que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Soient $a_1, \ldots, a_n$ n fonctions sur une variété (Y, δ_Y). Considérons $Y \times A$ muni du champ de vecteurs

$$\delta_{Y \times A} = \delta_Y + \sum_{i,j} \delta_Y(a_j) F_{i,j}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}.$$

Les trajectoires de ce champ de vecteurs sont les graphes des fonctions sur Y à valeurs dans A données par

$$\varphi_1(a_1 + c_1, \ldots, a_n + c_n), \ldots, \varphi_n(a_1 + c_1, \ldots, a_n + c_n),$$

les c étant des constantes de δ_Y. Un extension abélienne est une sous-variété $\delta_{Y \times A}$-invariante minimale Z de $Y \times A$ telle que la projection induite de Z sur Y soit dominante.

Extensions d'ordre un. — Une telle extension est donnée par une variété irréductible Z sur Y de dimension relative un et par un relevé δ_Z de δ_Y sans intégrales première rationnelles.

Définition 1.1bis *Soient (X, δ_X) une variété algébrique affine sur $\mathbb{C}$ muni d'un champ de vecteurs et $\pi : (X, \delta_X) \dashrightarrow (\mathbb{A}^1(\mathbb{C}), \frac{\partial}{\partial x})$ une application différentielle dominante. Le champ δ_X est dit* réductible *s'il existe une famille d'applications différentielles dominantes $\pi_i : (Y_i, \delta_i) \dashrightarrow (Y_{i-1}, \delta_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq m$ de type* élémentaires *avec $(Y_0, \delta_0) = (\mathbb{A}^1(\mathbb{C}), \frac{\partial}{\partial x})$ et une application différentielle $\varphi : (Y_m, \delta_m) \dashrightarrow (X, \delta_X)$ dite* réductrice.

2. Structures transverses des extensions réductrices

Les structures transverses que nous étudierons sont données par des suites de formes rationnelles commençant par une base de formes nulles sur les trajectoires du champ de vecteurs et satisfaisant à certaines identités différentielles. Ces suites sont aussi appelées suites de Godbillon-Vey ou équations de structures. Soient (Y, δ_Y) une variété munie d'un champ de vecteurs, N_Y le $\mathbb{C}(Y)$-espace vectoriel des formes sur Y s'annulant sur δ_Y et d_Y une forme rationnelle telle que $d_Y(\delta_Y) = 1$.

Extensions algébriques. — Si Z est un revêtement étale de Y, le relevé de δ_Y est unique et l'annulateur de ce relevé est $N_Z = \mathbb{C}(Z) \otimes_{\mathbb{C}(Y)} N_Y$. Pour cette raison, la géométrie transverse locale de ces extensions est triviale.

Extensions de Picard-Vessiot. — Soit Z une extension de Picard-Vessiot de Y. Les formes de N_Y s'annulent sur δ_Z. Une famille génératrice de l'espace des formes s'annulant sur δ_Z complétant N_Y est donnée par la matrice de formes suivante :

$$\Theta = G^{-1}dG - G^{-1}AGd_Y$$

où G est la matrice des coordonnées (g_j^p) de $GL_n(\mathbb{C})$ restreinte à Z. On vérifie que

$$d\Theta = -\Theta \wedge \Theta \text{ modulo } N_Y.$$

Cette identité traduit la structure de feuilletage de Lie linéaire de ce type d'équation au-dessus des trajectoires de δ_Y (*i.e.* modulo N_Y) ([**7**]).

Extensions abéliennes. — Soient Γ un réseau de $\mathbb{C}^n$ tel que $A = \mathbb{C}^n/\Gamma$ soit une variété abélienne, $\mathbb{C}(A)$ le corps des fonctions Γ-périodiques, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ une base de transcendance de $\mathbb{C}(A)$ sur $\mathbb{C}$ et $F_{i,j}$, $1 \le i, j \le n$, des fonctions algébriques de n variables telles que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Considérons $a_1, \dots, a_n$ n fonctions sur une variété (Y, δ_Y) et $Z \subset Y \times A$ une extension abélienne de Y de champ de vecteurs

$$\delta_Z = \delta_Y + \sum_{i,j} \delta_Y(a_j) F_{i,j}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}.$$

Nous noterons $(F_{i,j}^{-1})_{i,j}$ la matrice inverse de $(F_{i,j})_{i,j}$. Une famille génératrice de l'espace des formes s'annulant sur δ_Z complétant N_Y est donnée par

$$\eta_j = \sum_i F_{i,j}^{-1} d\varphi_i - \delta_Y(a_j) d_Y.$$

Ces formes sont fermées modulo N_Y.