

332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(997) *Dimères et surfaces aléatoires*

Raphaël CERF

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIMÈRES ET SURFACES ALÉATOIRES
[d'après les travaux de Kenyon et d'Okounkov]

par **Raphaël CERF**

INTRODUCTION

Lorsqu'un système présente un phénomène de transition de phases, il est possible de forcer la coexistence de deux ou plusieurs phases distinctes. Ces phases sont délimitées par des surfaces de séparation. À l'échelle macroscopique, ces surfaces se stabilisent près d'une forme déterministe, mais elles fluctuent dans une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. La compréhension de la nature et la description quantitative de ces fluctuations constituent des problèmes extrêmement ardues. Par exemple, dans le modèle d'Ising en dimension trois, nous sommes encore très loin de posséder les outils nécessaires pour conduire une analyse rigoureuse et précise des fluctuations des interfaces aléatoires entre les deux phases du modèle. Plutôt que d'attaquer directement ce problème dont les difficultés semblent formidables, une approche plus modeste consiste à considérer des modèles effectifs d'interface. Ce sont des modèles de surfaces aléatoires qui sont construits en spécifiant explicitement la loi de la surface, par exemple le modèle SOS ou les modèles d'interface gaussiens. Les modèles de dimères étudiés par Kenyon et Okounkov donnent lieu à des surfaces aléatoires qui appartiennent en quelque sorte à une catégorie intermédiaire entre les interfaces générées par le modèle d'Ising et celles du modèle SOS. Ce sont des interfaces construites au-dessus d'un système probabiliste complexe, qui présente des transitions de phase, et dont l'analyse peut être conduite grâce à l'étude asymptotique de certains déterminants, qui donnent des formules exactes.

Dans cet exposé introductif, nous présentons brièvement le modèle de dimères, ainsi que certaines formules essentielles. Nous définissons les objets importants qui permettent l'analyse du modèle : la matrice de Kasteleyn, la courbe spectrale, l'amibe. Kenyon et Okounkov ont étudié en profondeur le lien entre les modèles de dimères et une certaine catégorie de courbes algébriques appelées les courbes de Harnack.

Nous énonçons ensuite le résultat de Okounkov, Kenyon et Sheffield qui permet de localiser les phases du modèle grâce à l'amibe. Nous terminons en présentant le début de l'étude des formes asymptotiques réalisée par Kenyon et Okounkov. En plus des articles originaux [5, 6, 7, 8], le lecteur pourra consulter les notes du cours de Saint-Flour de Kenyon [4].

1. CONFIGURATIONS DE DIMÈRES

Nous considérons un graphe planaire G qui est biparti et \mathbb{Z}^2 périodique. Biparti signifie qu'il est possible de colorier les sommets du graphe avec deux couleurs, par exemple en blanc et noir, de manière à ce que deux sommets voisins soient toujours de couleurs distinctes. La propriété \mathbb{Z}^2 périodique signifie que le graphe et son coloriage en blanc et noir sont préservés par les translations à coordonnées entières. Des exemples standards de tels graphes sont le réseau carré ou le réseau hexagonal. Une configuration de dimères sur le graphe G est un sous-ensemble d'arêtes de G tel que chaque sommet soit incident à exactement une arête de ce sous-ensemble. En théorie des graphes, un recouvrement par des dimères s'appelle aussi un couplage parfait. Nous notons $\mathcal{M}(G)$ l'ensemble des configurations de dimères sur le graphe G .

2. FONCTIONS DE HAUTEURS

À une configuration de dimères sur G est naturellement associé un flot unité qui va des sommets blancs vers les sommets noirs : chaque sommet blanc est une source de débit 1 et chaque sommet noir est un puits de débit 1. Fixons M_0 une configuration périodique de dimères sur G et notons ω_0 le flot associé. Si M est une autre configuration de dimères sur G et si ω est le flot associé, alors la différence des deux flots $\omega - \omega_0$ est un flot de divergence nulle. Fixons une face f_0 . Soit γ un chemin dans le graphe dual G^* de G qui va de f_0 à une face f . Le flux total de $\omega - \omega_0$ à travers γ ne dépend pas du choix particulier de γ et est donc une fonction de la face f . Cette fonction s'appelle la fonction de hauteur associée à la configuration de dimères M . La fonction de hauteur dépend du choix de la face f_0 ainsi que de la configuration M_0 . Cependant, la différence entre deux fonctions de hauteurs associées à deux configurations de dimères ne dépend plus de M_0 ni de f_0 .

3. MESURES DE GIBBS

Une mesure de probabilité sur l'ensemble $\mathcal{M}(G)$ des configurations de dimères est construite de la manière suivante : on attribue à chaque arête e une énergie $\mathcal{E}(e)$. La fonction d'énergie d'une configuration de dimères est égale à la somme des énergies de ses arêtes :

$$\mathcal{E}(M) = \sum_{e \in M} \mathcal{E}(e).$$

Une mesure de Gibbs sur $\mathcal{M}(G)$ associée à l'énergie \mathcal{E} est une mesure de probabilité qui vérifie la condition suivante : étant donné un sous-graphe fini F de G , la probabilité conditionnelle de la configuration M_F des dimères dans F connaissant la configuration des dimères en dehors de F est proportionnelle à $\exp -\mathcal{E}(M_F)$: le facteur de proportionnalité est choisi de manière à ce que la somme des probabilités fasse un et vaut donc

$$Z_F = \sum_{M_F \in \mathcal{M}(F)} \exp -\mathcal{E}(M_F).$$

4. MATRICE DE KASTELEYN

Soit F un graphe planaire fini biparti. Un poids de Kasteleyn pour F est un choix de signe pour chaque arête de F qui a la propriété suivante : une face qui a un nombre d'arêtes égal à 0 modulo 4 a un nombre impair de signes moins et une face qui a un nombre d'arêtes égal à 2 modulo 4 a un nombre pair de signes moins. Une matrice de Kasteleyn pour F est une matrice indexée par $B \times W$, où B (respectivement W) est l'ensemble des sommets noirs (respectivement blancs) de F et telle que $K(b, w) = 0$ s'il n'existe pas d'arête joignant b à w , et sinon

$$K(b, w) = \text{weight}(\langle b, w \rangle) \exp -\mathcal{E}(\langle b, w \rangle),$$

où $\text{weight}(\langle b, w \rangle)$ est le poids de Kasteleyn de l'arête joignant b à w . Kasteleyn [2] a prouvé que la fonction de partition Z_F était égale au déterminant d'une telle matrice de Kasteleyn :

$$|\det K| = Z_F.$$

Cette formule est fondamentale, car elle permet d'obtenir le comportement asymptotique de la fonction de partition dans la limite thermodynamique via l'étude du comportement asymptotique d'un déterminant.

5. GRAPHS SUR LE TORE

Nous supposons que le graphe planaire G est \mathbb{Z}^2 périodique. Notons alors G_1 le graphe quotient de G par l'action de \mathbb{Z}^2 ; c'est un graphe fini biparti sur le tore. Pour de tels graphes, nous pouvons encore construire une matrice de Kasteleyn comme ci-dessus, et aussi définir une mesure de Gibbs. La fonction de partition de la mesure de Gibbs s'exprime alors comme une somme de quatre déterminants

$$Z = \frac{1}{2}(-Z^{(00)} + Z^{(10)} + Z^{(01)} + Z^{(11)})$$

où $Z^{(\theta\tau)}$ est le déterminant de la matrice de Kasteleyn dans laquelle les signes des arêtes qui croisent un cycle dual horizontal fixé ont été multipliés par $(-1)^\theta$ et les signes des arêtes qui croisent un cycle dual vertical fixé ont été multipliés par $(-1)^\tau$.

6. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Soit K une matrice de Kasteleyn pour le graphe G_1 et soient z, w deux paramètres. Soit γ_x (respectivement γ_y) un chemin dans le graphe dual de G_1 qui fait un tour horizontal (respectivement vertical) autour du tore. Le poids de chaque arête traversée par γ_x est multiplié par z si le sommet noir de l'arête est à gauche de γ_x et par z^{-1} s'il est à droite. De même, le poids de chaque arête traversée par γ_y est multiplié par w si le sommet noir de l'arête est au-dessus de γ_y et par w^{-1} s'il est en dessous. Le polynôme caractéristique de G est alors défini par

$$P(z, w) = \det K(z, w).$$

Modulo les symétries $z \mapsto -z$ et $w \mapsto -w$, cette définition ne dépend pas du choix des signes utilisés dans la construction de la matrice de Kasteleyn K . Nous avons alors

$$P((-1)^\theta, (-1)^\tau) = Z^{(\theta\tau)}$$

et la fonction de partition s'exprime à l'aide du polynôme caractéristique

$$Z = \frac{1}{2}(-P(1, 1) + P(1, -1) + P(-1, 1) + P(-1, -1)).$$

En fait, le comportement à grande échelle du modèle de dimères se décrit grâce au polynôme caractéristique.

7. CHAMP MAGNÉTIQUE

Nous introduisons un champ magnétique dans le modèle de la manière suivante. Notons $(B_x, B_y) \in \mathbb{R}^2$ le champ magnétique. Soit γ_x un chemin dans le dual de G_1 qui