332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(998) *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes de type fini*

Charles FAVRE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2008
61e année, 2008-2009, n° 998, p. 11 à 43

LE GROUPE DE CREMONA ET SES SOUS-GROUPES DE TYPE FINI

par **Charles FAVRE**

INTRODUCTION

Le groupe de Cremona $\mathrm{Cr}(2)$ est le groupe constitué des applications birationnelles du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. L'étude de ce groupe et de ses éléments fut initiée par E. De Jonquières, L. Cremona et M. Noether à la fin du XIXe siècle et leurs travaux ont largement inspiré les géomètres italiens du début du XXe siècle. Peu à peu cependant, le groupe de Cremona a quitté sa position centrale en géométrie algébrique. Comme nous le verrons, de nombreux aspects de la structure de $\mathrm{Cr}(2)$ restent encore mystérieux.

C'est un théorème dû à M. Noether que $\mathrm{Cr}(2)$ est engendré par $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ et l'involution $[x : y : z] \mapsto [yz : zx : xy]$ dite involution de Cremona. Au début des années 80, M. Gizatullin [**51**] puis V.I. Iskhovskikh [**58**] ont donné une présentation de $\mathrm{Cr}(2)$ par générateurs et relations. Bien que fondamental, ce résultat est en pratique délicat à appliquer. On ne sait par exemple pas si $\mathrm{Cr}(2)$ est un groupe simple(1), ou même quelles sont les structures de groupe topologique sur $\mathrm{Cr}(2)$.

Un moyen pour appréhender la structure de $\mathrm{Cr}(2)$ est d'en étudier les sous-groupes. L'étude des sous-groupes finis de $\mathrm{Cr}(2)$ a été récemment complétée par I. Dolgachev et V.I. Iskhovskikh [**35**] et nous renvoyons à l'exposé de J.-P. Serre [**71**] à ce séminaire pour un rapport détaillé sur la question. De même, les sous-groupes continus de $\mathrm{Cr}(2)$ ont été décrits par L. Enriques [**39**] en 1893(2). Un tel groupe est conjugué à un sous-groupe du groupe des automorphismes d'une surface torique (voir [**9**] pour plus de précisions).

(1) Le groupe des automorphismes polynomiaux du plan de jacobien 1 n'est pas simple, voir [**21**], et S. Cantat et S. Lamy ont annoncé l'analogue pour $\mathrm{Cr}(2)$.
(2) Voir [**24**] pour des résultats en dimension quelconque et [**76, 77**] pour une classification précise en dimension 3.

Ici nous nous intéresserons principalement aux sous-groupes G de $\mathrm{Cr}(2)$ infinis et *de type fini.* Nous allons décrire les résultats remarquables obtenus récemment par J. Deserti et S. Cantat sur ces groupes et les conséquences que l'on peut en tirer pour le groupe de Cremona lui-même.

Leurs travaux s'articulent autour de la question suivante : étant donné un groupe G de type fini, peut-on trouver un morphisme de groupe $\rho : G \to \mathrm{Cr}(2)$ qui soit injectif ? Pour traiter ce type de question, on dispose de deux méthodes. La première consiste à utiliser notre connaissance sur la structure des deux groupes G et $\mathrm{Cr}(2)$. Dans ce cas, les théorèmes de Noether, de Gizatullin et d'Iskhovskikh jouent un rôle crucial. La seconde consiste à faire agir le groupe d'arrivée sur un espace géométrique convenable, puis à analyser l'action induite par G sur cet espace. C'est cette méthode que nous allons mettre en œuvre ici, en nous reposant sur le fait établi par S. Cantat que $\mathrm{Cr}(2)$ agit par isométries sur un espace métrique hyperbolique au sens de Gromov. Ceci permet d'utiliser la théorie des actions de groupes sur de tels espaces, pour laquelle on dispose de nombreux outils, voir par exemple [**12, 49**].

Afin de motiver l'introduction de cet espace, penchons-nous tout d'abord sur le cas de la dimension 1, c'est-à-dire sur le groupe des transformations de Möbius $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$. Ce groupe agit holomorphiquement sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et par isométries sur l'espace hyperbolique de dimension 3 réelle $\mathbb{H}^3$.

Une application birationnelle $f \in \mathrm{Cr}(2)$ agit de même naturellement sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Cependant, cette action n'est pas holomorphe car f peut avoir des points d'indétermination. De plus, l'itération de f conduit en général à des phénomènes dynamiques extrêmement complexes, voir [**73**] : cette action n'est donc pas maniable pour le problème qui nous concerne.

Il a été progressivement réalisé que de nombreux aspects dynamiques d'une application birationnelle étaient contrôlés par son action sur la cohomologie $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ d'un modèle birationnel adéquat X de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. La construction d'un tel modèle n'étant pas canonique, on est amené à considérer l'espace (de dimension infinie) de toutes les classes de cohomologie de tous les modèles birationnels de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, espace dont la construction précise a été donnée par Y.I. Manin [**66**]. Sa complétion pour la forme bilinéaire induite par le cup produit définit un espace de Hilbert réel que l'on notera $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ et qui est muni d'une forme d'intersection de type Minkowski(3) $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$. Comme en dimension finie, l'une des deux nappes de l'ensemble $\{\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P}), \alpha\cdot\alpha = +1\}$ possède une métrique $d_{\mathbb{H}}$ qui en fait un espace hyperbolique au sens de Gromov. On notera $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ cet espace métrique.

Fait. — *Le groupe de Cremona* $\mathrm{Cr}(2)$ *agit par isométries sur l'espace* $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$.

(3) C'est-à-dire possédant un vecteur d'auto-intersection strictement positive, telle que la restriction de la forme sur l'orthogonal de ce vecteur soit définie négative.

Il existe une classification grossière des isométries d'un espace hyperbolique [**49**] : on parle d'isométrie hyperbolique, parabolique ou elliptique. On peut donc introduire la notion d'application birationnelle hyperbolique, parabolique ou elliptique suivant le type de son action induite sur $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$.

Un résultat dû à J. Diller et moi-même [**31**] donne la caractérisation géométrique suivante de chacun de ces trois types. Une application birationnelle f est elliptique si elle fixe une classe $\alpha \in \mathbb{H}(\mathfrak{P})$. On montre que c'est le cas précisément lorsqu'un itéré de f induit un automorphisme sur une surface rationnelle minimale. Une application f est parabolique si elle n'est pas elliptique et si elle fixe une classe non-nulle $\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ d'auto-intersection nulle. Dans ce cas, on montre que la classe α est déterminée par la fibre d'une fibration rationnelle ou elliptique f-invariante (dans un modèle birationnel adéquat). Enfin f est hyperbolique lorsque le rayon spectral $\lambda(f)$ de son action sur $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ vérifie $\lambda(f) > 1$. Dans ce cas, l'opérateur induit par f sur $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ possède deux vecteurs propres simples et d'auto-intersection nulle dont les valeurs propres associées sont $\lambda(f)$ et $\lambda(f)^{-1}$ respectivement. Nous renvoyons au théorème 2.7 ci-dessous pour un énoncé plus complet.

DÉFINITION. — *Un sous-groupe G de type fini de* $\mathrm{Cr}(2)$ *est dit élémentaire si G préserve une classe $\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ non nulle telle que $\alpha \cdot \alpha \geq 0$.*

Les résultats principaux de S. Cantat [**17**] peuvent alors s'énoncer sous la forme suivante.

THÉORÈME A. — *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Cr}(2)$ *de type fini. Si G n'est pas élémentaire, alors il contient deux éléments hyperboliques qui engendrent un groupe libre non-abélien.*

DÉFINITION. — *Soit G un sous-groupe de type fini de* $\mathrm{Cr}(2)$ *élémentaire.*

- *G est dit hyperbolique s'il contient un élément hyperbolique.*
- *G est dit parabolique s'il contient un élément parabolique.*
- *G est dit elliptique s'il ne contient que des éléments elliptiques.*

THÉORÈME B. — *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Cr}(2)$ *de type fini et élémentaire.*

1. *Si G est de type hyperbolique, il existe un sous-groupe G_0 d'indice au plus 2 dans G, et un morphisme surjectif $\rho : G_0 \to \mathbb{Z}$ dont le noyau ne contient que des éléments elliptiques, et tel que $\rho(f) \neq 0$ si et seulement si f est hyperbolique.*
2. *Si G est de type parabolique, il existe une surface rationnelle X et une fibration rationnelle ou elliptique sur X qui est préservée par tous les éléments de G. De plus G ne contient aucun élément hyperbolique.*

3. *Si G est de type elliptique, alors soit il possède un sous-groupe distingué d'indice fini conjugué à un sous-groupe de* $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ *; soit il existe une surface rationnelle X et une fibration rationnelle sur celle-ci préservée par tous les éléments du groupe.*

S. Lamy **[62]** avait précédemment donné une classification des sous-groupes du groupe $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux du plan, et ce sans hypothèse de type fini. Nous renvoyons au théorème 1.9 pour un énoncé précis.

Nous donnerons une preuve détaillée des théorèmes A et B à la section 3. Notons que ces résultats sont en fait vrais pour toute surface kählérienne : nous nous sommes restreint au plan projectif car les mêmes méthodes s'appliquent dans le cas général et sont plus faciles à mettre en œuvre. En effet, pour les surfaces de dimension de Kodaira non négative, une application biméromorphe est holomorphe sur son modèle minimal. De même, une application birationnelle d'une surface réglée non rationnelle préserve nécessairement le réglage.

Notons enfin que les méthodes que nous utiliserons étant purement algébriques, elles permettent aussi de traiter le cas du groupe de Cremona sur n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Dans ce cadre, il faut remplacer l'action sur la cohomologie par l'action sur le groupe de Néron-Severi.

Avertissement

Afin de garder ce texte court, nous n'évoquerons pas les aspects concernant l'étude dynamique des itérés d'une application birationnelle, pour laquelle il existe une littérature importante, voir **[2, 38, 73]** et les références qui s'y trouvent. De même, nous n'aborderons pas le problème de construction d'automorphismes de type hyperbolique sur les surfaces rationnelles. Nous renvoyons à **[68]** ou aux récents travaux de E. Bedford et K. Kim **[3, 4]** sur ce sujet. Enfin, nous avons délibérément choisi de ne pas parler de la dimension supérieure : aucune des techniques présentées ici ne se généralise de manière évidente dans ce cadre.

Je remercie chaleureusement S. Cantat, J. Deserti, R. Dujardin, J.-F. Quint et A. Zuk pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

1. APPLICATIONS

Commençons par quelques applications des théorèmes A et B. Nous verrons qu'il existe une analogie particulièrement frappante entre le groupe de Cremona et les