Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MULTIPLICITÉS MODULAIRES RAFFINÉES

Christophe Breuil & Ariane Mézard

Tome 142
Fascicule 1

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 127-174

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 142, janvier 2014

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € ($ 519)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
142 (1), 2014, p. 127–174

MULTIPLICITÉS MODULAIRES RAFFINÉES

par Christophe Breuil & Ariane Mézard

Résumé. — Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ continue suffisamment générique. En utilisant la conjecture sur les multiplicités modulaires de [6] démontrée dans [16], on montre qu'il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des composantes irréductibles de la fibre spéciale d'un anneau de déformations potentiellement semi-stables de $\overline{\rho}$ (à poids de Hodge-Tate et type galoisien fixés) et l'ensemble des poids de Serre de $\overline{\rho}$ distincts qui apparaissent dans la réduction modulo p du type de Bushnell-Kutzko pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ correspondant. Cette bijection préserve de plus les multiplicités respectives (de la composante irréductible dans son schéma ambiant, et du poids de Serre associé dans les constituants de la réduction modulo p). On conjecture que cela reste vrai en remplaçant $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ par $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F)$ pour F extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, et on donne une famille d'exemples non triviaux d'anneaux de déformations où c'est bien le cas.

Abstract (*Refined modular multiplicity*). — Let $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ be continuous and sufficiently generic. Using the conjecture on modular multiplicities of [6] proved in [16], we show that there is a natural bijection between the set of irreducible components of the special fiber of a potentially semistable deformation ring of $\overline{\rho}$ (with fixed Hodge-Tate weights and Galois type) and the set of distinct Serre weights of $\overline{\rho}$ which appear in the reduction mod p of the corresponding Bushnell-Kutzko type for

Texte reçu le 9 mai 2012 et accepté le 14 juin 2012.

Christophe Breuil, Bâtiment 425, C.N.R.S. et Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `christophe.breuil@math.u-psud.fr`

Ariane Mézard, IMJ-PRG CNRS, Université Pierre et Marie Curie, 75252 Paris Cedex 05, France • *E-mail :* `ariane.mezard@upmc.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F80, 11F85, 11S23.

Mots clefs. — Multiplicités modulaires, anneaux de déformations.

Le premier auteur remercie V. Paškūnas et M. Raynaud pour des discussions.

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. This bijection preserves respective multiplicities (of the irreducible component in its ambient scheme and of the associated Serre weight in the constituants of the reduction mod p). We conjecture that this remains true when replacing $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ by $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ by $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ for F a finite unramified extension of $\mathbb{Q}_p$, and we give a family of non trivial examples of deformation rings when this holds.

1. Introduction

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_E$, ϖ_E une uniformisante de E, $k_E = \mathcal{O}_E/(\varpi_E)$ son corps résiduel et soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue. À $\overline{\rho}$, on peut associer une ou plusieurs représentation(s) irréductible(s) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur k_E que l'on appelle les poids de Serre de $\overline{\rho}$. Il y a plus de 10 ans, nous avons proposé dans [6] (lorsque $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = k_E$) une conjecture reliant la réduction sur k_E des diverses $\mathcal{O}_E$-algèbres de déformations potentiellement semi-stables de $\overline{\rho}$ au nombre des poids de Serre de $\overline{\rho}$ apparaissant dans la réduction sur k_E des divers types de Bushnell-Kutzko de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Cette conjecture a été essentiellement démontrée (sous une forme un peu généralisée) par Kisin dans [16] en utilisant d'une part tout le programme de Langlands p-adique local pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qu'elle avait elle-même inspiré (voir [6, p.214-215], [9], [11], [22], [2], [4]), d'autre part un argument global de modularité. Signalons que Paškūnas en a maintenant une preuve purement locale ([23]) en utilisant des résultats de Dospinescu ([10]).

Rappelons la conjecture de [6] (telle qu'étendue dans [16]) dans le cas où $\overline{\rho}$ est suffisamment générique. Soit $k \geq 2$ un entier, t un type pour $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, i.e. une représentation de l'inertie de noyau ouvert $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{GL}_2(E)$ qui s'étend à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, et $\psi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times$ un caractère continu satisfaisant une relation de compatibilité convenable avec k et t. Soit $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$ la $\mathcal{O}_E$-algèbre fidèlement plate noethérienne complète réduite de corps résiduel k_E qui paramètre les déformations de $\overline{\rho}$ de dimension 2 sur des extensions finies de E, potentiellement semi-stables à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ et de type t (et éventuellement « framed » au sens de Kisin lorsque $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) \neq k_E$, voir [18, § 1]). Soit maintenant $\sigma(\mathrm{t})$ le type de Bushnell-Kutzko pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ associé à t (voir [15]) et $\overline{\sigma}(k,t)$ le semi-simplifiée modulo ϖ_E de la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $\sigma(k,t) \overset{\text{déf}}{=} \sigma(\mathrm{t}) \otimes_E \mathrm{Sym}^{k-2} E^2$. Lorsque $\overline{\rho}$ est suffisamment générique, la conjecture de [6] démontrée dans [16] est :

THÉORÈME 1.1 ([16]). — *La multiplicité de Hilbert-Samuel de l'anneau local $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E)$ est égale au nombre des poids de Serre de $\overline{\rho}$ (comptés avec leur multiplicité) qui apparaissent dans $\overline{\sigma}(k,t)$.*

L'anneau $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E)$ étant équidimensionnel, sa multiplicité de Hilbert-Samuel est la somme des multiplicités de ses composantes irréductibles. De même, le nombre des poids de Serre de $\overline{\rho}$ comptés avec leur multiplicité dans $\overline{\sigma}(k,\mathrm{t})$ est la somme des multiplicités des poids de Serre distincts qui y apparaissent. Les deux entiers du théorème 1.1 sont donc tous deux naturellement somme d'autres entiers. Nous démontrons au § 4 de cet article :

Théorème 1.2 (voir § 4). — *Si E est suffisamment grand, il existe une bijection qui respecte les multiplicités entre l'ensemble des composantes irréductibles de $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E)$ et l'ensemble des poids de Serre de $\overline{\rho}$ distincts dans $\overline{\sigma}(k,\mathrm{t})$.*

Autrement dit (au moins lorsque E est suffisamment grand) les entiers dans chaque somme sont en fait les mêmes des deux côtés. Comme $\overline{\rho}$ est suffisamment générique, il y a 0, 1 ou 2 poids de Serre de $\overline{\rho}$ distincts dans $\overline{\sigma}(k,t)$. La preuve consiste à montrer d'une part qu'il y a aussi respectivement 0, 1 ou 2 composante(s) irréductible(s) dans $R^{\square,\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})/(\varpi_E)$, d'autre part que les multiplicités côté déformations sont toujours majorées par les multiplicités côtés poids de Serre. Comme les sommes sont les mêmes par le théorème 1.1, les multiplicités des deux côtés doivent être égales. On *utilise* ainsi de manière essentielle le théorème 1.1 dans la preuve du théorème 1.2 (qui n'en fournit donc pas une nouvelle preuve). On utilise aussi de manière toute aussi essentielle des idées et techniques introduites par Kisin dans [16] que l'on rappelle au § 3.1 (le lecteur verra immédiatement à la lecture des §§ 3.1 et 4 tout ce que ces parties doivent à [16]). Notons que le théorème 1.2 n'est plus vrai tel quel lorsque $\overline{\rho}$ est quelconque : il peut y avoir soit plus de composantes irréductibles, soit plus de poids de Serre (voir théorème 4.1.7, corollaire 4.2.4 et corollaire 4.3.6 pour différents cas, voir aussi la fin de cette introduction).

Il peut arriver qu'il y ait plusieurs bijections comme dans le théorème 1.2. La correspondance de Langlands p-adique (par ailleurs essentielle dans les preuves des théorèmes 1.1 et 1.2) permet d'en définir une qui est canonique, au moins lorsque $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]}(\overline{\rho}) = k_E$. Soit $T^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$ la déformation universelle de $\overline{\rho}$ sur $R^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$, il lui correspond une certaine représentation linéaire continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $R^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$ que l'on note $A^{\psi}(k,\mathrm{t},\overline{\rho})$ (voir § 3.2). Rappelons que si R est un anneau commutatif noethérien, les composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(R)$ sont en bijection avec les idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}$ de R via $\mathfrak{p} \mapsto \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$.