GÉRARD BEN AROUS

Géométrie de la courbe brownienne plane

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki, exp. nº 730, p. 7-42
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__7_0>

Séminaire BOURBAKI
43ème année, 1990-91, n°730

Novembre 1990

GÉOMÉTRIE DE LA COURBE BROWNIENNE PLANE

par Gérard BEN AROUS

INTRODUCTION :

Nous passons en revue quelques résultats récents sur la géometrie de la trajectoire du mouvement brownien plan. Nous avons choisi d'exposer essentiellement les résultats de Pitman et Yor d'une part (sur le comportement en temps grand de certaines fonctionnelles browniennes, comme le temps passé dans un ensemble, ou le nombre de tours autour d'un ou plusieurs points) et les résultats sur la géométrie de la courbe brownienne en temps fini d'autre part, résultats que nous avons tirés pour l'essentiel, du cours de Le Gall [L12] à Saint-Flour. Nous invitons, bien sur, le lecteur intéressé à se reporter à ce cours, extrêmement riche et clair.

1. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN PLAN :

Nous rappelons ici brièvement quelques propriétés fondamentales. Ici, et dans toute la suite, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien plan issu de $z_0 \in \mathbf{C}$, c'est-à-dire un processus aléatoire $B_t = B_t^1 + iB_t^2$, indexé par $t \in \mathbf{R}_+$, à trajectoires presque surement continues, tel que

a) $B_0 = z_0$ $p.s$,

b) les processus réels $(B_t^1)_{t\geq 0}$ et $(B_t^2)_{t\geq 0}$ sont indépendants,

c) Pour $i \in \{1, 2\}$ et tous $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ la variable aléatoire $B_{t_n}^i - B_{t_{n-1}}^i$ est indépendante de $(B_{t_1}^i, \cdots, B_{t_{n-1}}^i)$ et sa loi est gaussienne de moyenne nulle et de variance $t_n - t_{n-1}$.

1.1 Invariance conforme et skew-product :

Il est clair que l'image par une isométrie d'un mouvement brownien est un mouvement brownien. Lévy a généralisé ce résultat de la façon suivante :

THÉORÉME 1.— *Si f est holomorphe d'un ouvert U de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ (avec $z_0 \in U$), et si on pose $\tau_U = \inf(t \geq 0, B_t \notin U)$, alors il existe un mouvement brownien $(\zeta_t)_{t \geq 0}$ tel que, pour tout $t \in [0, \tau_U[$: $f(B_t) = \zeta_{U_t}$ avec $U_t = \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds$.*

La preuve est simple : si $f = g + ih$, g et h sont harmoniques et $g(B_t)$ et $h(B_t)$ sont des martingales locales. La formule d'Ito et les équations de Cauchy Riemann montrent que ces martingales locales ont le même processus croissant U_t, et que le processus crochet $\langle g(B_t), h(B_t) \rangle$ est nul. Ce qui implique l'existence de deux browniens réels indépendants β_t et θ_t tels que : $g(B_t) = \beta_{U_t}$ et $h(B_t) = \theta_{U_t}$, pour $t \in [0, \tau_U[$. □

On déduit de ceci la représentation du brownien plan en "skew-product" : Si $z_0 \neq 0$ il existe un mouvement brownien complexe $\zeta_t = \beta_t + i\theta_t$ issu de 0 tel que :

$$B_t = z_0 \exp \zeta_{U_t}$$

avec

$$U_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2} = \inf(u \geq 0, \int_0^u \exp(2\beta_v) dv > t).$$

Ainsi, si on note $R_t = |B_t|$ on a : $R_t = |z_0| \exp \beta_{U_t}$ et si $\phi_{(t)}$ désigne la détermination continue de l'argument de B_t telle que $\phi_{(0)} = \arg z_0 \in]-\pi, \pi]$: $\phi(t) = \theta_{U_t}$. Ainsi $\phi(t)$ est un mouvement brownien réel dont on a changé le temps par une "horloge" (ici U_t) indépendante.

On déduit très simplement de cette représentation que :

a) le mouvement brownien plan est récurrent. C'est-à-dire que pour tout ouvert D de $\mathbf{C}$ presque surement $\forall t \quad \exists T > t \quad B_T \in D$.

b) Avec probabilité 1 : $\limsup_{t \to \infty} \phi(t) = +\infty$ et $\liminf_{t \to \infty} \phi(t) = -\infty$.

En effet $|B_t| = |z_0| \exp \beta_{U_t}$ et $\lim_{t\to\infty} U_t = +\infty$, par le fait que $\limsup_{v\to\infty} \beta_v = +\infty$ et $\liminf_{v\to\infty} \beta_v = -\infty$ on a le résultat si D est une boule de centre 0, ce qui suffit pour prouver le a). De plus $\phi(t) = \theta_{U_t}$ et U_t tend vers l'infini ce qui prouve le b).

Ces deux propriétés du mouvement brownien plan font naître deux questions essentielles.

D'une part le mouvement brownien plan revient infiniment souvent visiter tout ouvert D de $\mathbf{C}$. On peut se demander quelle proportion de temps il y passe. De façon plus précise, il s'agit de comprendre le comportement asymptotique de $\int_0^t 1_{B_s \in D} ds$ lorsque t tend vers l'infini. La réponse est connue depuis longtemps : ce temps d'occupation est de l'ordre de $\log t$.

Pour un énoncé plus précis de ce théorème, dû à Kallianpur et Robbins voir plus bas, au 2.4. b).

D'autre part, par le b) ci-dessus nous savons que le mouvement brownien "fait un nombre infini de tours autour de zéro lorsque t tend vers l'infini". On peut étudier aussi le comportement asymptotique précis de $\phi(t)$ lorsque t tend vers l'infini. La réponse est fournie par le théorème de Spitzer : $\phi(t)$ est de l'ordre de $\log t$ (voir plus bas au 2.4. a) pour un énoncé plus précis).

Pitman et Yor ont construit un outil extrêmement souple pour montrer que ces deux théorèmes (de Kallianpur et Robbins et de Spitzer) sont deux aspects d'un même phénomène, et pour généraliser radicalement ces énoncés. Nous donnons un aperçu de ces résultats au §2.

1.2 Dimension de Hausdorff de la courbe brownienne

La mesure de la courbe brownienne : $\{B_s, s \in [0, \infty[\}$ est nulle. En effet :

$$m(\{B_s, s \in [0, \infty[\}) = \int dy P(T_y < \infty)$$

où $T_y = \inf(s, B_s = y)$.

Or $P(T_y < \infty) = 0$ pour tout $y \neq z_0$ (i.e. les points sont pôlaires). Néanmoins on peut vérifier que la dimension de Hausdorff de cette courbe est 2. Pour un résultat plus précis, voir plus bas (au 3.2).

Lévy [Lé 4] explique ainsi la différence entre la courbe brownienne (de mesure nulle) et la courbe de Péano :

" Pour qu'une aire soit remplie sans que l'oscillation brownienne soit infinie, il faut une exploration méthodique que le hasard ne peut réaliser".

En particulier, la trajectoire brownienne se recoupe beaucoup. On sait depuis les travaux de Dvoretzky, Erdös et Kakutani qu'il existe des points multiples de toute multiplicité (finie ou non). On donnera au §3 les progrès récents sur cette question de l'auto-intersection de la courbe brownienne plane, en insistant sur un outil essentiel : le temps local d'auto-intersection ; i.e. une mesure de Radon aléatoire portée par les instants de multiplicité. Une question intimement reliée à la précédente est celle du volume des voisinages tubulaires de la courbe brownienne. Elle est abordée au §4, sans pourtant y faire mention des résultats de grandes déviations (qui ont été abordés par Sznitman dans son exposé (Bourbaki ; Février 1987), voir aussi [DV]).

Enfin au §5 nous montrons à quel point la géométrie de la courbe brownienne est complexe en donnant les résultats récents relatifs à l'enveloppe convexe, les composantes connexes du complémentaire et les points de coupure de cette courbe, sur un intervalle de temps fini. Comme le dit Lévy à ce propos (en citant Leibniz) "Notre imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir".

Fixons ici certaines **notations** pour la suite :

$B_{[u,v]}$ est la trajectoire brownienne entre les instants u et v

$$B_{[u,v]} = \{B_s, s \in [u,v]\} \quad \text{pour} \quad 0 \leq u < v \ .$$

- $m(A)$ est la mesure de Lebesgue de A.
- $D(a,r)$ le disque dans $\mathbf{C}$ de centre a, de rayon r et $D = D(0,1)$.
- $T_A = \inf(t, B_t \in A)$ est le temps d'atteinte de A par le brownien plan.

2. NOMBRE DE TOURS ET LOIS LIMITES :

Pitman et Yor ([PY1] et [PY2]) ont isolé, dans la preuve des deux théorèmes les plus importants pour le comportement en temps grand du mouvement brownien plan (i.e. les théorèmes de Spitzer et de Kallianpur-Robbins), un argument commun et général, et en ont tiré une ligne de conduite (brièvement : "faire un changement d'échelle sur le mouvement brownien en représentation "skew-product"") qui leur a permis d'étendre de façon considérable les théorèmes cités et de mettre au jour leurs liens. Ils ont prouvé ainsi un très grand nombre de résultats nouveaux et ouvert un champ qui semble inépuisable. Il est impossible d'aborder ici tous les aspects de leurs travaux. Nous allons seulement introduire le formalisme unificateur des "limites en échelle logarithmique" (traduction très peu satisfaisante de "log-scaling limit") et donner quelques conséquences.

2.1 Limites en échelle logarithmique : Définitions

On note $\Omega(\mathbf{C})$ l'espace des fonctions continues de $[0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Soit $(\psi(h,\omega)\ ,\ h > 0, \omega \in \Omega(\mathbf{C}))$ un processus et φ une fonction mesurable sur $\Omega(\mathbf{C})$.

Soit B un mouvement brownien, issu de $z_0 \neq 0$. On notera ζ le mouvement brownien, issu de zéro, intervenant dans la décomposition de B en "skew-product" et on posera, si $h > 0$:

$$\zeta_u^h = \frac{1}{h}\zeta_{h^2 u}.$$

On dira que le processus ψ converge vers φ en échelle logarithmique (de pôle 0) si pour tout mouvement brownien B, issu de $z_0 \neq 0$, $\psi(h, B) - \varphi(\zeta^{(h)})$ converge en probabilité vers zéro, lorsque h tend vers l'infini.

Il est clair que, si $\psi(h)$ converge en échelle logarithmique vers φ, alors $\psi(h)$ converge en loi vers φ. Mais, toutes les convergences en loi obtenues ainsi sont valides **conjointement**. On pourrait aussi définir la notion de limite en échelle logarithmique de pôle différent de zéro. Toutes les convergences en loi obtenues par limite en échelle logarithmique de pôles éventuellement distincts sont valides conjointement.

2.2 Quelques exemples :

On va donner ici des exemples, utiles pour la suite, de temps aléatoires qui convergent en échelle logarithmique. Ces temps seront tous de la forme :

$$V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$$

a) Si on choisit $T_h = \inf(t, R_t = e^{vh})$ avec $v \in \mathbf{R}$ on voit que $V_h = \sigma_v(\zeta^{(h)})$, où $\sigma_v = \inf(t, \beta_t = v)$. Et donc que V_h converge en échelle logarithmique vers σ_v. (ceci est une tautologie).

b) Si $T_h = e^{2vh}$ où $v > 0$, alors V_h converge en échelle logarithmique vers σ_v.

Ce résultat, est la clef du théorème de Spitzer. Il est néanmoins très simple et fondé sur une méthode de Laplace (*cf.* [L12] par exemple).

c) Soit A_t une fonctionnelle additive continue, croissante, de masse finie. Si $v > 0$, on pose $T_h = \inf(t, A_t = vh)$. $V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$ converge en échelle logarithmique vers $\inf(u, L_u(\beta) = \frac{2\pi}{\|A\|} v)$. Ici $L_u(\beta)$ est le temps local en 0 du mouvement brownien unidimensionnel $\beta = \mathrm{Re}\ \zeta$.

Pour vérifier ceci, on commence par considérer le cas où A_t est le temps local ℓ_t de $\log |B_t|$ en 0. Dans ce cas $V_h = \inf(u, L_u(\beta^{(h)}) = v)$ et il est trivial que V_h converge en échelle logarithmique vers $\inf(u, L_u(\beta) = v)$.

Dans le cas général, on se ramène au cas particulier précédent au moyen du théorème ergodique pour les fonctionnelles additives (Ito-Mc Kean [IMK] p.277) :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_t}{\ell_t} = \frac{\|A\|}{2\pi}.$$

2.3 Attracteurs logarithmiques :

Si $G(t, B)$ est une fonction du temps et du brownien B, on peut l'exprimer sous la forme : $G(t, B) = \Gamma(U_t, \zeta)$ pour un processus $\Gamma(u) = \Gamma(u, \zeta)$. Il suffit de poser :

$$\Gamma(u, \zeta) = G(U^{-1}(u), z_0 \exp \zeta(U_.))$$

On définit $\Gamma^{(h)}$ par changement d'échelle :

$$\Gamma^{(h)}(u) = \frac{1}{h}\Gamma(h^2 u).$$

La recette pour fabriquer $\Gamma^{(h)}$ à partir de G est donc la suivante : exprimer la fonctionnelle G en fonction du mouvement brownien ζ (qui intervient dans la représentation en "skew-product"), oublier l'horloge U_t i.e. remplacer t par u, puis faire le changement d'échelle en u.

Par exemple : Si θ_t désigne la détermination continue de l'argument de B_t telle que $\theta_0 = \arg z_0 \in] - \pi, \pi]$ (i.e. le nombre de tours autour de zéro) le processus ainsi fabriqué est

$$\Gamma^{(h)}(u) = \frac{1}{h}\theta(h^2 u) \quad (\text{avec} \quad \theta = \operatorname{Im} \zeta).$$

DÉFINITION : On dit que G est attiré logarithmiquement par le processus γ si le processus $\Gamma^{(h)}$ converge en échelle logarithmique vers γ i.e. : $\Gamma^{(h)}(\zeta) - \gamma(\zeta^{(h)})$ converge en probabilité vers 0, au sens de la convergence uniforme sur les compacts.

Remarque : Pitman-Yor [PY2] caractérisent parmi les processus continus les attracteurs logarithmiques : ce sont ceux qui commutent avec le changement d'échelle brownien i.e. ceux qui s'écrivent $\gamma(u,\zeta) = \sqrt{u}\hat{\gamma}(\zeta^{(\sqrt{u})})$ où $\hat{\gamma}$ est une variable aléatoire.

Voici **deux exemples** d'attracteurs logarithmiques :

1) Pour $i \in \{1,2,3\}$ on pose

$$G_i(t) = \int_0^t 1_{(R_s \in I_i)} d\phi_s \quad \text{et} \quad \gamma_i(u) = \int_0^u 1_{\beta_v \in J_i} d\theta_v$$

avec

$$I_1 =]r,\infty[\ ,\ I_2 =]0,r[\ ,\ I_3 =]0,\infty[\quad (\text{et} \quad r > 0)$$

et

$$J_1 =]0,\infty[\ ,\ J_2 =]-\infty,0[\ ,\ J_3 =]-\infty,\infty[.$$

alors G_i est attiré logarithmiquement par γ_i.

2) Si $G(t) = A_t$ est une fonctionnelle additive croissante continue, de masse finie, alors G est attiré logarithmiquement par $\frac{\|A\|}{2\pi} L_u(\beta)$.

On a le théorème trivial mais essentiel :

THÉORÈME 2.— *Si $(T_h)_{h>0}$ est une famille de temps aléatoires telle que $V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$ converge en échelle logarithmique vers le temps aléatoire τ, si $G = (G(t), t > 0)$ est, par ailleurs, une fonctionnelle brownienne attirée logarithmiquement par $\gamma = (\gamma(u), u > 0)$, alors $\frac{1}{h} G(T_h)$ converge en échelle logarithmique vers $\gamma(\tau)$.*

COROLLAIRE.— *Si G est attiré logarithmiquement par γ alors $\frac{2}{\log t} G(t)$ converge en loi vers $\gamma(\sigma_1)$ lorsque t tend vers l'infini.*

En effet le théorème et l'exemple 2.2.2 montrent que : $\frac{1}{h} G(e^{2h})$ converge en loi vers $\gamma(\sigma_1)$. Il suffit de poser $h = \frac{\log t}{2}$ pour conclure.

2.4 Nombre de tours et temps d'occupation :

a) Le théorème de Spitzer

Si l'on considère $\phi(t)$ la détermination continue de l'argument de B_t telle que $\phi(0) = \arg z_0 \in]-\pi,\pi]$. On a vu (et c'est ici trivial) que ϕ est attiré logarithmiquement par $\theta(u)$ (la partie imaginaire du mouvement brownien ζ issu de 0). Par le corollaire du théorème 2 et l'exemple 2.2.2 b), on a donc le théorème de Spitzer [S1] :

$$\frac{2}{\log t}\phi(t) \quad \text{converge en loi vers} \quad \theta(\sigma_1) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty\,.$$

Il suffit pour retrouver l'énoncé complet du théorème de Spitzer de rappeler que $\theta(\sigma_1)$ a une loi de Cauchy standard, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} P(\frac{2}{\log t}\varphi(t) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dy}{\pi(1+y^2)}$$

b) Le théorème de Kallianpur-Robbins :

Si A_t est une fonctionnelle additive croissante continue de masse finie, le même corollaire montre, puisque A est attiré par $\frac{\|A\|}{2\pi}L_u(\beta)$, que :

$$\frac{2}{\log t}A_t \quad \text{converge en loi vers} \quad \frac{\|A\|}{2\pi}L_{\sigma_1}(\beta) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty\,.$$

En particulier si $A_t = \int_0^t f(B_s)ds$, où f est positive, on a ainsi :

$$\frac{2}{\log t}\int_0^t f(B_s)ds \xrightarrow{(d)} \frac{\int f(x+iy)dxdy}{2\pi}L_{\sigma_1}(\beta)$$

Pour retrouver l'énoncé complet du théorème de Kallianpur-Robbins [KR] il suffit de rappeler que $L_{\sigma_1}(\beta)$ suit une loi exponentielle de moyenne 2. On a ainsi par exemple :

$$\frac{2}{\log t}\int_0^t 1_{B_s\in D}ds \xrightarrow{(d)} \frac{m(D)}{\pi}\mathbf{e}$$

où D est un borélien de $\mathbf{R}^2$ de mesure finie, et où $\mathbf{e}$ est une variable exponentielle de paramètre 1.