AST

# Méthodes semi-classiques. Volume 2 - Pages préliminaires

*Astérisque*, tome 210 (1992), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__210__1_0>

210 ASTÉRISQUE

1992

# MÉTHODES SEMI-CLASSIQUES

## Volume 2

**Colloque International (Nantes, juin 1991)**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**A.M.S. Subjects Classification (par article, dans l'ordre de la table des matières) :**

35C15 - 35J10 - 35J70 - 35P99 - 58G07 - 58G30 •35P25 • 35Q51 - 35Q5 • 35P99 • 35P25
58G • 35P99 • 81Q20 - 81Q05 - 82Q99 • 35P20 - 81Q10 • 35P25 • 58F20 - 35P25 • 81V45
35P10 - 35P25 - 47A40 • 35Q40 - 81Q20 • 55N99 - 58A99 • 81V45 - 81Q20 • 81C05 - 82A99
35C20 - 35P15 - 35P20 • 35P25 • 35P25 - 47A40 - 81U05 • 35P25

## TABLE DES MATIERES

# INTRODUCTION

Avec le soutien du C.N.R.S et de la D.R.E.D, l'année académique 1990/91 fût une année spéciale consacrée aux méthodes semiclassiques.

A l'origine les méthodes semi-classiques désignaient les techniques utilisées par les physiciens pour essayer de comprendre les relations subtiles existant entre la mécanique classique de Newton et la mécanique quantique de Heisenberg-Schrödinger (lorsque la constante de Planck $\hbar$ devient négligeable par rapport aux autres grandeurs physiques: masse, énergie, distances, ... ). L'exemple fondamental est la méthode B.K.W (Brillouin, Kramers, Wentsel ) qui consiste à construire des solutions asymptotiques, par rapport à la constante de Planck, de l'équation de Schrödinger. Cette méthode est restée longtemps formelle. La justification mathématique rigoureuse a nécessité l'élaboration de théories sophistiquées qui ont vu le jour dans les années 1970 (indice de Maslov, opérateurs intégraux de Fourier-Hörmander). A partir de ces travaux de base, de nombreux mathématiciens se sont attaqués avec succès à divers problèmes issus de la physique et se traduisant par l'étude spectrale d'opérateurs pseudo-différentiels, dépendant de paramètres. Citons quelques exemples parmi les plus connus:

- le comportement du spectre de l'opérateur de Schrödinger lorsque la constante de Planck tend vers zéro ( régle de Bohr-Sommerfeld, effet tunnel )
- le comportement asymptotique des grandes valeurs propres ( formules du type Weyl)
- la trace du noyau de la chaleur lorsque la température tend vers zéro et les invariants géométriques associés
- diffusion quantique ou acoustique: problèmes à plusieurs corps, problèmes inverses, résonances
- systèmes périodiques: analyse du spectre de bande, problèmes inverses
- description de certains systèmes quantiques désordonnés: potentiels quasi périodiques, équation de Harper, chaos quantique
- limite thermodynamique.

Durant ces quinze dernières années, les méthodes semi-classiques se sont beaucoup enrichies avec le développement de l'analyse microlocale des équations aux dérivées partielles et de leurs solutions. De nombreux mathématiciens (et physiciens!) ont participé à ce développement. Parmi les travaux que l'on peut considérer comme fondamentaux mentionnons en particulier ceux de S. Agmon, Y. Colin de Verdière, J. Chazarain, L. Hörmander, V. Ivrii, J. Leray,V. Maslov, R. Melrose, J. Sjöstrand, A. Voros (je cite ces noms car il me sem-

ble bien représenter le rapprochement fructueux qui s'est effectué durant cette période entre l'analyse des équations aux dérivées partielles et la physique-mathématique ).
Deux volumes de la collection **Astérisque** regroupent les actes de l'Ecole d'Eté et du Colloque International organisés à Nantes, en Juin 1991. L'Ecole d'Eté était centrée sur quatre cours: V. Ivrii (Asymptotiques Spectrales); M.A Shubin (Théorie spectrale sur les variétés non compactes); A. Soffer (Problèmes à N-corps) et G. Ulhmann (Problèmes inverses). Le Colloque International comportait vingt conférences portant sur des thèmes variés, illustrant la puissance des méthodes semi-classiques appliquées aux équations de la mécanique quantique ou à l'équation des ondes acoustiques. Les sujets abordés concernent principalement l'équation de Schrödinger sous différents aspects: N-corps, champs magnétiques, limite thermodynamique, solitons, cristaux. Deux exposés sont consacrés à la diffusion acoustique par un obstacle et à la conjecture de Lax-Philips sur les résonances.

En conclusion, je voudrais remercier les institutions et les personnes qui ont permis le succès de cette année spéciale sur les méthodes semiclassiques, en premier lieu le C.N.R.S en la personne de J.P Ferrier et la D.R.E.D en la personne de J. Giraud. Je remercie également tous ceux qui ont participé à l'organisation des différents colloques qui se sont déroulés entre Novembre 1990 et Juin 1991, en particulier les collègues suivants: J. Bellissard, J.M.Bismut, A. Ben Arous, J.M. Combes, C. Gérard , A. Grigis , J.C Guillot, B. Helffer, A. Martinez, J.F.Nourrigat, F. Pham, J. Sjöstrand, A.Unterberger, A. Voros.
Je remercie l'université de Nantes et le conseil général de Loire-Atlantique pour le soutien qu'ils nous ont apporté.
D. Macé-Ramette a assuré avec dévouement et compétence le secrétariat de cette année spéciale, je l'en remercie.

Nantes, le 21 Décembre 1992

D. Robert

# RESUMES

**1.** AGMON Shmuel . *A representation theorem for solutions of Schrödinger type equations on non compact Riemannian manifolds*
Let $X$ be a real analytic Riemannian manifold with a boundary $\partial X$. Denote its interior by $X$ and its metric by $g$. Introduce on $X$ a conformal metric $h$ defined by $h = p^{-2}g$ where $p(x)$ is a real analytic on $X$ such that $p(x) > 0$ in $X, p(x) = 0$ and $dp \neq 0$ on $\partial X$. Under the metric $h$, $X$ becomes a complete non-compact Riemannian manifold with a corresponding Laplacian $\Gamma_h$. Consider solutions of the differential equation.

$$(*) \ \ \Gamma_h u + \lambda q(x) u = 0 \quad \text{on} X$$

where $q(x)$ is a real analytic function on $\partial X$ and $\lambda \in \mathbf{C}$.
Our main result is a representation theorem for all solutions of equation (*). The theorem is a generalization of a representation formula established by Helgason and Minemura for solutions of the Helmholtz equation on hyperbolic space.

**2.** BOUTET de MONVEL Anne-Marie; GEORGESCU Vladimir. *Some developments and applications of the abstract Mourre theory*
Our aim is to present several applications of a version of Mourre theory that we have recently developed. We can easily deduce from it, for example, a very precise form of the limiting absorption principle for perturbations $H = h(P) + V_S + V_L$ of a constant coefficient pseudo-differential operator $h(P)$ by short-range and long-range *non local* potentials $V_S$ and $V_L$. The perturbations $V_S, V_L$ are quite singular locally (the sum above is required to exist only in form-sense) and the assumptions concerning their behaviour at infinity are essentially optimal (e.g $V_S$ is of Enss type). Furthermore, if such an $H$ is perturbed by another short-range potential, the relative wave operators exist and are complete. The theory works aslo for systems (like Dirac operators). Other applications are to division theorems, i.e.properties of the operators of multiplication by $(h(x) \pm io)^{-1}$, under minimal regularity assumptions on $h$. In particular these examples show that the regularity assumptions we make in our abstract version of Mourre theory are essentially optimal.

**3.** BUSLAEV Vladimir; PERELMAN Gregor. *On nonlinear scattering of states which are close to a soliton*
Under some conditions on the function $F$ the nonlinear Schroedinger equation

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + F(|\psi|^2)\psi, \psi = \psi(x,t) \in \mathbf{C},$$

admits a class of bounded solutions $w(x|\sigma(t))$, which parameters $\sigma = \sigma(t) \in \mathbf{R}^4$ depend explicitely on time $t$. The Cauchy problem for the Schroedinger equation with the initial data

$$\psi(x,0) = w(x|\sigma_0(0)) + \chi_0(x)$$

is considered where $\chi_0$ is assumed to have the sufficiently small norm

$$N = \|(1+x^2)\chi_0\|_2 + \|\chi_0'\|_2.$$

If the spectrum of the linearization of the Schroedinger equation on the soliton $w(\cdot|\sigma_0(0))$ has the simplest structure in some natural sense, the asymptotic behavior of $\psi$ as $t \to +\infty$ is given by the formula (in $\mathbf{L}_2$-norm):

$$\psi = w(\cdot|\sigma_+(t)) + \exp(-il_0 t)f_+ + o(1),$$

here $\sigma_+(0)$ is close to $\sigma_0(0), l_0 = -\partial_x^2, f_+ \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ and is sufficiently small.

**4.** BRUNING Jochen; SUNADA Toshikazu. *On the spectrum of gauge-periodic elliptic operators*
We consider a symmetric elliptic operator, D, on a complete Riemannian manifold which admits a properly discontinuous action of a group $\Gamma$, with compact quotient. We assume that D is "gauge periodic" i.e. commutes with the group action twisted by a gauge; a typical example is the Schrödinger operator with constant magnetic field. We associate a $C^*$-algebra with this situation and prove that the spectrum of (the closure) D has band sructure if this $C^*$-algebra has the "Kadison property". For the magnetic Schrödinger operator, we can derive an optimal upperbound on the number of gaps for rational flux.

**5.** GEORGESCU Vladimir; BOUTET de MONVEL Anne-Marie. *Graded $C^*$-algebras and many-body perturbation theory:* II. *The Mourre estimate*
Let $\mathcal{L}$ be a finite lattice with largest element $X$ and $\mathcal{A}$ a $C^*$-algebra. We say that $\mathcal{A}$ is $\mathcal{L}$-graded if a family $\{\mathcal{A}(Y)\}_{Y\in\mathcal{L}}$ of $C^*$-subalgebras has been given such that $\mathcal{A} = \sum_{Y\in\mathcal{L}} \mathcal{A}(Y)$ (direct sum) and $\mathcal{A}(Y)\mathcal{A}(Z) \subset \mathcal{A}(Y \vee Z)$ for $Y, Z \in \mathcal{Z}$. The Hamiltonians usually considered in the many-body problems are affiliated to such an algebra. If $\mathcal{A}$ is realized on a Hilbert space $\mathcal{H}$, the many-channel structure of a self-adjoint operator $H$(in general non densely defined) affiliated to $\mathcal{A}$ may be described as follows : for each $Y \in \mathcal{L}, \mathcal{A}_Y = \sum_{Z\leq Y} \mathcal{A}(Z)$ is a $C^*$-algebra, the natural projection $\mathcal{P}_Y : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_Y$ is a $*$-homomorphism and there is a unique self-adjoint operator $H_Y$ such that $\mathcal{P}_Y(f(H)) = f(H_Y)$ for all

$f \in C_\infty(\mathbf{R})$. Let $A$ be a self-adjoint operator such that $e^{-iA\alpha}\mathcal{A}(Y)e^{iA\alpha} \subset \mathcal{A}(Y)$ for all $Y$ and $\alpha$. Assume that $D(H_Y)$ is invariant under $e^{iA\alpha}$ for all $Y$ and $\frac{d}{d\alpha}e^{-iA\alpha}He^{iA\alpha}$ exists in norm in $B(D(H), D(H)^*)$ and $H$ has a spectral gap. Our main result is that,under a further assumption on $\mathcal{A}$ which is independent of $H$ and trivially verified in the $N$-body case. $A$ is conjugate to $H$ at a point $\lambda \in \mathbf{R}$ if it is conjugate to each $H_Y$ with $Y \neq X$ at $\lambda$.

**6.** GUILLEMIN Victor. *The homogeneous Monge-Ampere equation on a pseudoconvex domain*
In the first three sections of this article I give a new proof of a theorem of Jack Lee which says that if $M$ is a compact strictly pseudoconvex domain with a real-analytic boundary, one can find a defining function on the boundary which satisfies the homogeneous complex Monge-Ampere equation. The proof involves complexifying a solution of a related real Monge-Ampere equation.
The rest of this article is devoted to a generalization of a theorem of L. Boutet de Monvel. Boutet's theorem says that if $X$ is a compact manifolf equipped with a real-analytic Riemannian metric and $f$ is a real-analytic function of $M$ then the following are equivalent

(1) $f$ can be extended holomorphically to a Grauert of radius $r$, about $X$.

(2) The diffusion equation, $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta^{\frac{1}{2}}u$, can be solved *backwards* in time over the interval,$-r \leq t \leq 0$ with initial data :

$$u(0, x) = f(x).$$

In the second half of this article I show that this theorem has a generalization in which Grauert tubes are replaced by a family ,$\phi = r$, of strictly pseudoconvex domains, $\phi$ satisfying homogeneous Monge-Ampere.

**7.** HAGEDORN George. *Classification and normal forms for quantum mechanical eigenvalue crossings*
In the analysis of molecular systems, one is led to the study of a quantum mechanical Hamiltonian for the electrons that is a function of $n$ parameters that describe the positions of the nuclei. As the parameters are varied, the spectrum of the electron Hamiltonian can change.The way in which the graphs of the discrete eigenvalues cross one another depends on the symmetry group of the Hamiltonian function. We classify generic crossings of minimal multiplicity eigenvalues under all possible symmetry circumstances. For each of the eleven types of crossings, we derive a normal form for the Hamiltonian function near the crossing.

**8.** HELFFER Bernard; SJÖSTRAND Johannes. *Semiclassical expansions of the thermodynamic limit for a Schrödinger equation*
We give a proof of the semi-classical expansion of the thermodynamic limit for a model introduced in statistical mechanics by M.Kac. For this family