AST

Sur la cohomologie équivariante des variétés différentiables - Pages préliminaires

Astérisque, tome 215 (1993), p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215__1_0>

215 ASTÉRISQUE

1993

SUR LA COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Michel DUFLO, Shrawan KUMAR, Michèle VERGNE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : 19L47 • 22E45 • 57R91

Table des matières.

II. S. Kumar and M. Vergne. Equivariant cohomology with generalized coefficients

Introduction

Soit G un groupe de Lie réel opérant dans une variété M. Le complexe de de Rham équivariant et sa cohomologie $H_G^*(M)$ ont été introduits par H. Cartan. Si l'action de G sur M est libre, $H_G^*(M)$ est la cohomologie $H^*(G\backslash M)$ de l'espace des orbites et si M est le point $\bullet$, $H_G^*(\bullet)$ est l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. A chaque fibré G-équivariant sur M muni d'une connection G-invariante sont associées des classes de Chern équivariantes. Il s'est avéré indispensable de considérer des objets cohomologiques plus généraux tels que l'algèbre $H_G^\infty(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients C^∞ qui est une algèbre sur $H_G^\infty(\bullet) = C^\infty(\mathfrak{g})^G$, et l'espace $H_G^{-\infty}(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients $C^{-\infty}$ qui est un module pour $H_G^\infty(M)$, et pour laquelle $H_G^{-\infty}(\bullet)$ est l'espace des fonctions généralisées invariantes $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$.

Le premier des deux articles réunis ici, *Cohomologie équivariante et descente, par Michel Duflo et Michèle Vergne*, étudie une généralisation, notée $\mathcal{K}_G(M)$, de la cohomologie $H_G^\infty(M)$. C'est une algèbre sur $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$. On peut la considérer comme un analogue global de $H_G^\infty(M)$ et comme une version à la de Rham de la K-théorie équivariante de M. La construction de $\mathcal{K}_G(M)$ est basée sur la considération des points fixes dans M des éléments de G contenus dans un sous-groupe compact. Tout au moins lorsque G lui-même est compact, et sous certaines conditions d'orientation, "l'intégrale" sur M d'un élément de $\mathcal{K}_G(M)$ est une fonction G-invariante sur G.

Le deuxième article, *Equivariant cohomology with generalized coefficients, par Shrawan Kumar et Michèle Vergne*, entreprend une étude systématique des espaces $H_G^{-\infty}(M)$. On découvre des classes remarquables qui n'ont pas d'équivalent dans la théorie C^∞. En particulier lorsque l'action de G sur M est libre, l'intégrale sur M d'un élément de $H_G^{-\infty}(M)$ est une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$ de support 0. Lorsque G est compact, une suite spectrale permet de comparer $H_G^{-\infty}(M)$ et la cohomologie équivariante $H_G^*(M)$.

Les deux articles, bien qu'ayant des motivations communes, peuvent être lus indépendamment.

Astérisque

MICHEL DUFLO
MICHÈLE VERGNE

Cohomologie équivariante et descente

Astérisque, tome 215 (1993), p. 5-108
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215__5_0>

Cohomologie équivariante et descente

Michel Duflo et Michèle Vergne

Introduction.

Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On suppose que le groupe G agit sur une variété M. Dans cet article nous étudions un procédé pour construire des fonctions centrales sur G basé sur l'intégration de formes différentielles équivariantes sur M et sur la méthode de descente.

La motivation de ce travail est la suivante: dans certains cas, on sait associer à l'action de G sur M et à la donnée d'un fibré G-équivariant $\mathcal{L} \to M$ un espace de Hilbert $H(M, \mathcal{L})$ et une représentation traçable $T_{\mathcal{L}}$ de G dans $H(M, \mathcal{L})$. La trace $\operatorname{Tr} T_{\mathcal{L}}(g)$ de la représentation $T_{\mathcal{L}}$ est alors une fonction généralisée centrale sur G. On peut souvent donner une formule pour le caractère $\operatorname{Tr} T_{\mathcal{L}}(g)$ de la représentation $T_{\mathcal{L}}$ en fonction de la cohomologie équivariante de M et du caractère de Chern de $\mathcal{L}$. Les formules données par exemple dans [8], [18], [12] sont une généralisation des formules de points fixes d'Atiyah-Segal-Singer [3] combinées avec la formule universelle des caractères de Kirillov [26]. Dans [31] nous utilisons les notions introduites dans cet article pour donner une formule universelle pour le caractère $\operatorname{Tr} T_{\mathcal{L}}(g)$.

Nous considérons ici une action régulière d'un groupe presque algébrique G sur une variété M (voir la définition 51 dans la section 2.4). Les exemples d'actions régulières incluent l'action d'un groupe compact sur une variété compacte et l'action d'un groupe algébrique sur une variété algébrique. Nous associons à une action régulière de G sur M un espace $\mathcal{K}_G(M)$ de cohomologie équivariante globale. Soit $\bullet$ un point. Alors on a $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$ et l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ est un module sur $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$.

Pour définir la notion d'intégration, il est nécessaire d'introduire un espace $\mathcal{K}_G(M)_t$ de cohomologie équivariante globale tordue (l'indice t est pour "tordu"). Alors, tout au moins si G et M sont compacts, l'intégration définit une application $\mathcal{K}_G(M)_t \to C^\infty(G)^G$.

Décrivons les notions introduites et les résultats de cet article plus précisément. Introduisons quelques notations. Si M est une variété différentiable, on note $\mathcal{A}(M) = \bigoplus_i \mathcal{A}^i(M)$ l' algèbre des formes différentielles à valeurs complexes sur M. Si M est orientée, et si $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ est à support compact, on note $\int_M \alpha = \int_M \alpha_{[\dim M]}$ l'intégrale de son terme de degré maximal. Cependant, il n'est pas toujours naturel de choisir une orientation, ni même de supposer M

orientable. Considérons la variété $\tilde{M}$ dont les éléments sont des couples (m, o), où m est dans M et où o est une orientation de l'espace tangent $T_m(M)$. C'est un revêtement d'ordre 2 de M, le groupe $\mathbb{Z}^\times = \{+1, -1\}$ opère dans $\tilde{M}$ de sorte que $\tilde{M}$ est un fibré principal de base M. Notons ε l'action de -1 dans $\tilde{M}$. On note encore ε l'action induite dans les formes différentielles sur $\tilde{M}$. On peut identifier $\mathcal{A}(M)$ à la sous-algèbre des éléments $\omega \in \mathcal{A}(\tilde{M})$ tels que $\varepsilon(\omega) = \omega$. On note $\mathcal{A}(M)_t$ l'espace des éléments $\omega \in \mathcal{A}(\tilde{M})$ tels que $\varepsilon(\omega) = -\omega$. C'est un module sur $\mathcal{A}(M)$, stable par la différentielle de de Rham de $\mathcal{A}(\tilde{M})$. Un élément de $\mathcal{A}(M)_t$ sera appelé une forme différentielle tordue. Les formes différentielles tordues de degré maximum sont aussi appelées densités. On notera $\int_M \beta = \int_M \beta_{[\dim M]}$ l'intégrale d'un élément $\beta \in \mathcal{A}(M)_t$ à support compact.

Soit M une variété différentiable sur laquelle G opère. Soit U un voisinage ouvert G-invariant de 0 dans $\mathfrak{g}$. Soit $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ l'algèbre des formes $X \mapsto \alpha(X)$ sur M dépendant de manière différentiable de $X \in U$. Soit $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ la sous-algèbre de $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ formée des éléments G-invariants. C'est une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On sait que $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ est munie d'une dérivation impaire de carré nul, notée $d_\mathfrak{g}$. Un élément de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ sera appelé une forme équivariante. On notera $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ l'espace de cohomologie de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$. Si $M = \bullet$ est un point, on a $\mathcal{H}_G^\infty(\bullet) = C^\infty(U)^G$. (Ces notions sont redéfinies dans la section 1.1).

L'action de G se relève de manière canonique en une action dans $\tilde{M}$ commutant à ε. L'espace des éléments $\omega \in \mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ tels que $\varepsilon(\omega) = -\omega$ sera noté $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t$. C'est l'espace des formes différentielles équivariantes tordues (pour le fibré tangent). Il est stable par $d_\mathfrak{g}$. C'est un module différentiel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué sur l'algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$. Soit $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)_t$ l'espace de cohomologie de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t$ (ces notions font l'objet de la section 5.1). Supposons pour un moment M compacte. Soit $\beta \in \mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t$ une forme équivariante tordue. L'intégrale $\int_M \beta(X)$ sur M définit une fonction différentiable et G-invariante dans U. Si l'application exponentielle est un difféomorphisme dans U, on obtient par composition une fonction différentiable et centrale dans l'ouvert $\exp(U)$ de G. Cette fonction ne dépend que de la classe de β modulo $d_\mathfrak{g}(\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t)$. Donc si β est fermée, cette fonction ne dépend que de la classe de β dans $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)_t$.

L'origine de cet article vient de l'observation suivante. Soit G_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de G (cette notion est définie dans la section 2.1; si G est compact, $G_{ell} = G$). Soit $s \in G_{ell}$ et soit $G(s)$ le centralisateur de s. Soit $\mathfrak{g}(s)$ l'algèbre de Lie de $G(s)$. Pour $s \in G_{ell}$ notons $M(s)$ l'ensemble des points fixes de s dans M. C'est une sous-variété de M dans laquelle $G(s)$ opère. On choisit pour chaque $s \in G_{ell}$ un voisinage U_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ et une classe $\beta_s \in \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(U_s, M_s)_t$. La fonction $\int_{M(s)} \beta_s(X)$ définie pour $X \in U_s$ est invariante par $G(s)$. Si les choix sont bien faits, il existe une unique fonction centrale Θ sur G telle que pour $X \in U_s$ on ait

$$\Theta(se^X) = \int_{M(s)} \beta_s(X).$$

Nous nous sommes interrogés sur les conditions que la famille β_s doit satisfaire pour assurer l'existence de la fonction Θ. Considérons tout d'abord le cas où M est un point • La description de Θ revient à utiliser la *méthode de descente.* Si f_s est une fonction différentiable $G(s)$-invariante sur U_s, alors il est facile de déterminer les conditions que doit satisfaire la famille $(f_s)_{s\in G_{ell}}$ pour qu'il existe une fonction Θ différentiable et G-invariante sur G telle que

$$f_s(X) = \Theta(se^X)$$

pour $X \in U_s$. Tout d'abord le système de fonctions f_s doit satisfaire la condition d'invariance suivante:

$$f_{gsg^{-1}}(g \cdot X) = f_s(X) \tag{1}$$

pour tout $s \in G_{ell}$ et tout $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit. D'autre part, il est clair que si $S \in \mathfrak{g}(s)$ est une transformation elliptique et si $Y \in \mathfrak{g}(s)$ commute à S on doit avoir

$$f_s(S+Y) = \Theta(se^{S+Y}) = \Theta(se^S e^Y)$$

(si S et Y sont assez petits). Les fonctions f_s satisfont donc la relation de recollement suivante

$$f_s(S+Y) = f_{se^S}(Y) \tag{2}$$

pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)$ elliptique et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)$ commutant à S assez petits.

Réciproquement, si les ouverts U_s sont des ouverts elliptiques (voir la définition 35 d'ouverts elliptiques dans la section 2.2) et si $(f_s)_{s\in G_{ell}}$ est une famille de fonctions différentiables définies sur un voisinage elliptique U_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ satisfaisant les relations (1) et (2) d'invariance et de recollement, il existe une unique fonction différentiable Θ centrale définie dans G tout entier telle que $f_s(X) = \Theta(se^X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(s)$ (ceci est expliqué dans la section 2.2).

Soit M une variété munie d'une action régulière de G. On définit dans la section 3.2 l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ des bottes de classes de cohomologie équivariante. Un élément de $\mathcal{K}_G(M)$ est une famille $\alpha = (\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ de classes de cohomologie $G(s)$-équivariantes sur $M(s)$ (définies sur U_s) satisfaisant des conditions d'invariance et de recollement données précisément dans la définition 61. Enonçons succinctement la condition de recollement que nous imposons: soit $s \in G_{ell}$ et soit $S \in \mathfrak{g}(s)$ une transformation elliptique petite. Alors $G(se^S)$ est contenu dans $G(s)$ et comme l'action de G sur M est régulière, la sous-variété $M(se^S)$ est contenue dans $M(s)$. Pour tout $s \in G_{ell}$ soit $\tilde{\alpha}_s \in \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(U_s, M(s))$ une forme différentielle équivariante fermée représentant α_s. Considérons l'opérateur de translation $T_{s,S}$ défini par $(T_{s,S}\tilde{\alpha}_s)(X) = \tilde{\alpha}_s(S+X)|M(se^S)$ pour $X \in \mathfrak{g}(se^S)$ petit. La forme $T_{s,S}\tilde{\alpha}_s$ est une forme $G(se^S)$-équivariante fermée sur $M(se^S)$. Nous demandons l'égalité *en cohomologie* et sur un petit voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(se^S)$

$$T_{s,S}\tilde{\alpha}_s \cong \tilde{\alpha}_{se^S}. \tag{3}$$

J.Block et E.Getzler [10] ont étudié pour l'action d'un groupe compact G sur une variété compacte M un espace $\mathcal{K}'_G(M)$ où les conditions de recollement