Astérisque

FRANÇOISE DAL'BO

MARC PEIGNÉ

Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées sur la surface modulaire en courbure non constante

Astérisque, tome 238 (1996), p. 111-177

http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__238__111_0

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE DE GÉODÉSQUES FERMÉES SUR LA SURFACE MODULAIRE EN COURBURE NON CONSTANTE

Françoise DAL'BO & Marc PEIGNÉ

Soit $\bar{g}_\varepsilon$ une perturbation de la métrique hyperbolique sur $M = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, nous démontrons que le nombre de géodésiques fermées sur $(M, \bar{g}_\varepsilon)$ de longueur au plus a est équivalent quand a tend vers $+\infty$ à $e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$ (où δ_ε est l'exposant critique de la série de Poincaré associée à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$). La démonstration de ce résultat repose sur un codage des géodésiques fermées de $(M, \bar{g}_\varepsilon)$ relié au développement en fractions continues des réels et sur l'utilisation d'un théorème du renouvellement harmonique nécessitant une étude spectrale précise de l'opérateur de transfert mis en jeu. Nous retrouvons également par cette méthode probabiliste la distribution asymptotique des constantes de Lévy des nombres quadratiques.

Let $\bar{g}_\varepsilon$ be a variation of the hyperbolic metric on $M = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, we prove that the number of closed geodesics on $(M, \bar{g}_\varepsilon)$ with length less or equal to a is equivalent to $e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$ (where δ_ε is the critical exponent of the Poincaré series associated with $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$). The proof of this result is based on a coding of closed geodesics related to the continuous fractions expansion of the reals and on an harmonic renewal theorem which requires a precise description of the spectrum of the appropriate transfer operator. Using this probabilistic method, we give a new proof of the asymptotic distribution of the Lévy constants of the quadratic numbers.

TABLE DES MATIÈRES

	Introduction	115
1	Codage des géodésiques de M en courbure constante	121
	1.1 Points de changement des géodésiques de $\mathbb{H}^2$	122
	1.2 Propriétés des éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	125
	1.3 Passage au quotient	127
2	Flot géodésique et codage en courbure constante	129
	2.1 Représentation du flot géodésique par un flot spécial	129
	2.2 Lien entre mesure de Gauss et mesure de Liouville	130
3	Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées de M en courbure constante	131
	3.1 Le théorème A se déduit du théorème B	132
	3.2 Démonstration du théorème B	134
4	Distribution asymptotique des constantes de Lévy des nombres quadratiques	139
	4.1 Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1, partie (i)	140
	4.2 Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1 partie (ii)	142
5	Étude du comportement asymptotique du potentiel harmonique d'une marche de Markov sur $\mathbb{R}$	145
	5.1 Démonstration du théorème du renouvellement harmonique	147
	5.2 Le couple (P, f) vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3, H_4	151
6	Perturbation de la métrique de Poincaré sur M	155
	6.1 Codage des géodésiques fermées de $(M, \bar{g}_\varepsilon)$	155
	6.2 Transformation dilatante et mesure T_ε -invariante sur Λ^+	157
	6.3 Comportement asymptotique de $\pi_\varepsilon(a)$	161
	6.4 Le couple $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$ vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3, H_4	165
	6.5 Mélange du flot géodésique sur $(M, \bar{g}_\varepsilon)$	171
	Bibliographie	175

INTRODUCTION

Notons d la distance de Poincaré sur $\mathbb{H}^2$ et $\bar{g}$ la métrique de Poincaré sur la surface modulaire $M = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Soit $\varepsilon \geq 0$, une métrique $\bar{g}_\varepsilon$ sur M est une ε -perturbation de $\bar{g}$ si la distance d_ε induite par $\bar{g}_\varepsilon$ sur $\mathbb{H}^2$ et la courbure K_ε de $(M, \bar{g}_\varepsilon)$ satisfont les hypothèses suivantes :

1. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$,

$$(1 + \varepsilon)^{-1}d(z_1, z_2) \leq d_\varepsilon(z_1, z_2) \leq (1 + \varepsilon)d(z_1, z_2).$$

En d'autres termes, les espaces métriques $(\mathbb{H}^2, d)$ et $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ sont $(1 + \varepsilon, 0)$ -quasi-isométriques [11].

2. Il existe $b \in]0, 1]$ et $R > 0$ tels que pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, $K_\varepsilon(z) \leq -b^2$ et $K_\varepsilon(z) = -1$ si $\mathrm{Im}z \geq R$.

En d'autres termes, la courbure de M est strictement négative et égale à -1 dans la pointe.

Une telle métrique est obtenue par exemple en perturbant la métrique $\bar{g}$ « régulièrement » dans un compact de M .

Notons δ_ε l'exposant critique de la série de Poincaré $\sum_{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} e^{-sd_\varepsilon(i, \gamma(i))}$, si $\varepsilon = 0$ alors $\delta_0 = 1$, nous démontrons le

Théorème A. — *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le nombre $\pi_\varepsilon(a)$ de géodésiques primitives fermées orientées de $(M, \bar{g}_\varepsilon)$ de longueur au plus a soit équivalent à $e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$ lorsque a tend vers $+\infty$.*

Si $\varepsilon \neq 0$, ce théorème est nouveau, le cas de la courbure variable ayant été abordé (à notre connaissance) jusqu'à présent pour des variétés compactes ([23], [20] et [27] pour le problème plus général des flots d'axiome A). La méthode classique utilisée en courbure variable s'appuie sur l'existence d'une partition de Markov associée au flot géodésique, garantie par la compacité de la variété. Cette méthode semble s'étendre au cas convexe cocompact mais n'est apparemment pas adaptée à l'étude des variétés avec pointes.

Si $\varepsilon = 0$, la courbure est alors constante égale à -1 et dans ce cas le théorème A est connu ([15], [26], [10]). Différentes méthodes ont été développées

en courbure constante. L'une d'elles, basée sur la formule des traces de Selberg [29], est particulièrement bien adaptée aux variétés de volume fini (même infini si la variété est une surface dont l'exposant critique $\delta \in]\frac{1}{2}, 1]$ (cf. [10]) et précise dans certains cas [15] l'asymptotique par un reste. Cette approche ne paraît pas appropriée à la courbure variable.

La méthode que nous utilisons ici pour démontrer le théorème A a été introduite par S. Lalley [19] pour dénombrer les géodésiques fermées des quotients de $\mathbb{H}^n$ par des groupes de Schottky (dans [8] nous étendons cette étude à des groupes libres contenant des transformations paraboliques). Le fait que les groupes de Schottky soient purement hyperboliques est essentiel dans le travail de S. Lalley, cela assure, dans le codage des géodésiques fermées mis en jeu, le caractère dilatant du décalage et la régularité höldérienne de la fonction plafond. Dans notre cas, afin de conserver cette propriété de dilatation, nous sommes amenés à introduire un codage d'alphabet infini. Nous compensons cette difficulté en exploitant la géométrie du problème et notamment la dynamique des transformations de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Voici le résumé du déroulement de la démonstration du théorème A :

Notons $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ le bord de $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ (cf. [11] chap. 7). Nous introduisons une transformation dilatante T_ε sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$, traduisant la dynamique des éléments de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le bord. Nous codons alors les géodésiques fermées de $(M, \bar{g}_\varepsilon)$ par des points T_ε -périodiques de $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et exprimons leur longueur à l'aide d'une fonction f_ε définie sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$. En un deuxième temps nous construisons une mesure de probabilité ν_ε sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ invariante par T_ε et absolument continue par rapport à la mesure de Patterson σ_ε [17]. Nous relierons ensuite $\pi_\varepsilon(a)$ aux mesures $N_{(\xi,a)}^\varepsilon$ définies pour tout $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et pour toute fonction continue par morceaux et bornée φ sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ par

$$N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\xi' / T_\varepsilon^{2n} \xi' = \xi} \varphi(\xi') \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n} f_\varepsilon(\xi'))$$

où $S_{2n} f_\varepsilon(\xi') = f_\varepsilon(\xi') + f_\varepsilon(T_\varepsilon \xi') + \dots + f_\varepsilon(T_\varepsilon^{2n-1} \xi')$.

Le théorème A se déduit alors du

Théorème B. — Soient $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et A un intervalle de $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ tel que $\nu_\varepsilon(A) > 0$. Lorsque a tend vers $+\infty$ $N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A)$ est équivalent à $h_\varepsilon(\xi) \sigma_\varepsilon(A) e^{a\delta_\varepsilon} / a \delta_\varepsilon$ uniformément par rapport à $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ (la fonction h_ε représentant la densité de ν_ε par rapport à σ_ε).

Les mesures $N_{(\xi,a)}^\varepsilon$ s'expriment comme potentiel harmonique de la chaîne de Markov $(Y_n, f_\varepsilon(Y_1) + \dots + f_\varepsilon(Y_n))$ sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, les transitions du processus Y_n étant gouvernées par l'opérateur P_ε adjoint de T_ε par rapport à ν_ε . Après une étude spectrale précise de P_ε , on montre que le théorème B découle directement du résultat général suivant : soient X un espace métrique compact, $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur X de noyau de transition Q et g une fonction borélienne positive sur X ; on note $\tilde{Q}$ le noyau de transition sur $X \times \mathbb{R}$ associé à la chaîne de Markov $(X_n, g(X_1) + \dots + g(X_n))_{n \geq 0}$. On a le

Théorème du renouvellement harmonique. — Supposons que le couple (Q, g) satisfasse les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 explicitées dans le paragraphe 5. Soient μ l'unique mesure de probabilité Q -invariante sur X et m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La famille de mesures $\left(a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{Q}^n((x, a), dy, dt)\right)$ converge vaguement lorsque a tend vers $+\infty$ vers la mesure produit $\mu(dy) \otimes m(dt)$ uniformément par rapport à $x \in X$.

Pour démontrer ce théorème nous reprenons des arguments développés dans [1], [13] et [21]. Soulignons que l'étude directe du comportement asymptotique de ces potentiels évite l'utilisation, comme dans [19] d'un théorème des grands écarts. L'étude spectrale de P_ε permet aussi d'appliquer un théorème du renouvellement « classique » (c'est-à-dire sans le facteur $\frac{1}{n}$) et, en reprenant les arguments de Y. Guivarc'h et J. Hardy [13], d'obtenir la

Proposition. — Pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de $(M, \bar{g}_\varepsilon)$ est mélangeant relativement à la mesure $\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}$ (voir § 6.5).

La démonstration que nous proposons de ce résultat repose sur l'étude de l'opérateur de transfert P_ε .

Nous donnons également une application de notre méthode « probabiliste » à l'arithmétique en retrouvant des résultats de C. Faivre concernant la distribution asymptotique des constantes de Lévy des nombres quadratiques. Introduisons brièvement quelques notations : si $x \in]0, 1[$ est un irrationnel quadratique, on note $N(x)$ la plus petite période de son développement en fractions continues et $\ell(x)$ la « longueur » de x définie par $\ell(x) = -2 \sum_{i=0}^{N(x)-1} \log T^i(x)$ si $N(x)$ est pair et $\ell(x) = -4 \sum_{i=0}^{N(x)-1} \log T^i(x)$ sinon. De plus, si $[a_0(x), a_1(x), \dots]$ est le développement en fractions continues de x , on pose $\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = [a_0(x), \dots, a_n(x)]$; si x est un irrationnel quadratique alors la suite $\left(\frac{1}{n} \log q_n(x)\right)_{n \geq 1}$ converge vers un réel noté $\beta(x)$ et appelé « constante de Lévy » de x . Nous avons le

Théorème [9]. — Soient $a > 0$ et $\mathcal{I}_a$ l'ensemble des irrationnels quadratiques $x \in]0, 1[$ tels que $\ell(x) \leq a$.

- i) Le cardinal de $\mathcal{I}_a$ est équivalent à $\frac{3 \log 2}{\pi^2} e^a$ lorsque a tend vers $+\infty$.
- ii) La somme $\sum_{x \in \mathcal{I}_a} \beta(x)$ est équivalente à $\frac{e^a}{4}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

À PROPOS DU PLAN...

Les paragraphes 1 à 5 sont rédigés dans le but d'exposer une méthode nouvelle permettant de retrouver des résultats connus. Suite à la rédaction de ce travail nous avons été encouragés à l'adapter au cas de la courbure « légèrement » variable. Souhaitant conserver l'esprit initial dans lequel nous nous étions placés, nous avons ajouté le paragraphe 6 dans lequel nous indiquons les modifications à apporter à la démonstration du théorème A en courbure constante pour obtenir l'asymptotique de $\pi_\varepsilon(a)$ avec $\varepsilon \neq 0$. Cette extension à la courbure variable s'appuie sur différents travaux parus sur les variétés hyperboliques (au sens de M. Gromov). Les références que nous utilisons sont : le livre de É. Ghys et P. de la Harpe [11], un article de M. Bourdon [4] sur le bord des CAT(-1)-espaces et un article de V. Kaimanovitch [17] sur les mesures invariantes.

Nous tenons à remercier Y. Guivarc'h pour ses précieux conseils, E. Le Page pour l'intérêt permanent qu'il a porté à ce travail ainsi que L. Guillopé pour la précision avec laquelle il a lu notre première rédaction.

Les discussions que nous avons eues avec F. Ledrappier et ses encouragements nous ont aidés à aboutir à la rédaction du paragraphe 6.