

Astérisque

PATRICE LE CALVEZ

**Propriétés dynamiques des difféomorphismes
de l'anneau et du tore**

Astérisque, tome 204 (1991)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__204__1_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

204

ASTÉRISQUE

1991

**PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES
DES DIFFÉOMORPHISMES
DE L'ANNEAU ET DU TORE**

Patrice LE CALVEZ

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Table des matières

Introduction	3
Chapitre 1. Présentation et comparaison des différentes approches de la théorie des difféomorphismes de l'anneau déviant la verticale	5
1. Exemples	
2. Définitions et notations : applications déviant la verticale, nombres de rotation	
3. Etude variationnelle des difféomorphismes déviant la verticale et préservant l'aire : la théorie d'Aubry-Mather	
4. Etude topologique des difféomorphismes déviant la verticale et préservant l'aire : la théorie de Birkhoff	
5. Le cas général des applications déviant la verticale	
6. Etude du cas dissipatif : les attracteurs de Birkhoff	
Chapitre 2. Phases génératrices des difféomorphismes du tore ou de l'anneau	55
1. Présentation des résultats.	
2. Composition de difféomorphismes du plan déviant la verticale	
3. Etude des difféomorphismes conservatifs de l'anneau	
4. Un énoncé équivariant du théorème de translation de Brouwe.	
5. Etude des ensembles de rotation des difféomorphismes du tore	
6. Orbites périodiques des difféomorphismes du tore	
Bibliographie	121
Index	129
Summary	131

Introduction

Les difféomorphismes de l'anneau qui dévient la verticale se retrouvent dans un certain nombre de systèmes dynamiques, conservatifs ou dissipatifs. Un problème important est la recherche d'orbites périodiques ou d'orbites ayant d'autres propriétés dynamiques bien déterminées. Différentes méthodes ont été mises en oeuvre ; certaines sont variationnelles (la théorie d'Aubry-Mather) et conviennent au cas conservatif, d'autres sont topologiques et conviennent également au cas dissipatif. Dans le premier chapitre nous donnerons un panorama de ces méthodes. Dans le second chapitre, nous montrerons que certaines idées de la théorie d'Aubry-Mather se généralisent naturellement aux composées d'applications déviant la verticale, même dans le cas dissipatif, et permettent de retrouver voir d'améliorer certains résultats sur les difféomorphismes de l'anneau qui n'ont pas cette propriété de dévier la verticale, ou alors sur les difféomorphismes du tore de dimension deux .

Voici quelques années que Michel Herman m'a proposé d'étudier les attracteurs de Birkhoff, il m'a ensuite posé beaucoup de questions et j'ai tenté de répondre à certaines d'entre-elles ; je tiens à le remercier ici pour tout ce qu'il m'a appris.

Je remercie également Alain Chenciner et John Mather pour l'intérêt constant qu'ils ont porté à mes travaux, pour leurs explications, et pour leurs encouragements.

Je remercie aussi tous ceux, en particulier Raphaël Douady, Albert Fathi, Jean-Marc Gambaudo, Lucien Guillou, Jean-Claude Sikorav et Jean-Christophe Yoccoz, et tous les membres du laboratoire de Topologie et Dynamique d'Orsay, avec qui j'ai eu des discussions profitables et chaleureuses.

Enfin je remercie le "referee" pour sa lecture attentive du manuscrit original, pour ses nombreuses remarques et pour ses propositions de modifications du texte.

Merci enfin à Bernadette Barbichon pour m'avoir gentiment et patiemment expliqué le système Sweet $\TeX$ de Larry Siebenmann avec lequel a été composé ce texte.

Chapitre 1

Présentation et comparaison des différentes approches de la théorie des difféomorphismes de l'anneau déviant la verticale

L'étude qualitative d'un certain nombre d'équations différentielles se déduit, utilisant une section de Poincaré, de celle d'un difféomorphisme de l'anneau ou d'une partie de l'anneau, pouvant avoir des propriétés supplémentaires, comme celles de préserver ou de diminuer les aires, par exemple. Nous nous intéresserons principalement à une autre propriété, définie dans le premier paragraphe, la propriété de déviation de la verticale. Cette propriété, que Poincaré avait déjà rencontré, est remarquable à deux points de vue. D'une part un certain nombre de systèmes dynamiques sont définis par des applications vérifiant cette propriété, comme par exemple, l'étude d'un point fixe elliptique générique d'un difféomorphisme du plan préservant l'aire (nous donnerons d'autres exemples dans le premier paragraphe). D'autre part l'écriture d'un difféomorphisme quelconque de l'anneau comme composée de ces applications permet d'étudier celui-ci. Nous verrons dans ce chapitre que la dynamique des difféomorphismes qui dévient la verticale peut être comprise de façon assez précise et a plus d'un point commun avec celle des endomorphismes du cercle de degré un, qui sont d'ailleurs des cas dégénérés de ces applications.

Le paragraphe 2 sera consacré à des définitions et à quelques rappels. Dans les paragraphes 3 et 4, nous nous intéresserons aux difféomorphismes qui dévient la verticale et préservent l'aire et appliquerons les résultats obtenus à l'étude des points fixes elliptiques génériques des difféomorphismes conservatifs du plan. Nous connaissons déjà la théorie de Kolmogorov, Arnold, Moser, qui est elle-même une conséquence de la déviation de la verticale, et qui donne l'existence de courbes invariantes au voisinage du point fixe. Dans le paragraphe 3, nous exposerons une partie de la théorie d'Aubry-Mather, qui est variationnelle et qui donne l'existence d'orbites périodiques ou ayant un nombre de rotation donné ; celle-ci nous permet,

en particulier, de dire ce qu'il est advenu des courbes invariantes manquantes. Dans le paragraphe 4, nous exposerons la théorie de Birkhoff, qui est topologique et qui permet, dans notre exemple, de préciser la dynamique entre les courbes invariantes.

Dans le paragraphe 5, nous ne supposons plus aucune condition d'aire, et nous donnerons des résultats liés uniquement à la propriété de déviation. Nous commencerons à voir les analogies avec les endomorphismes du cercle. Nous énoncerons également certains résultats, que nous généraliserons dans le second chapitre avec des méthodes complètement différentes.

Dans le paragraphe 6, nous étudierons le cas des difféomorphismes déviant la verticale et diminuant l'aire. Nous verrons comment préciser les résultats du paragraphe précédent, pour définir, puis étudier ce qu'on appelle les attracteurs de Birkhoff.

1. Exemples.

Les équations, dites de Van der Pol, apparaissent parmi les premières équations différentielles de type dissipatif où se rencontrent des phénomènes dynamiques compliqués : on trouve en particulier un attracteur qui possède un fer à cheval. Considérons l'équation

$$\varepsilon \ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + \varepsilon x = bp(t) ,$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre, φ une fonction négative pour $|x| < 1$, positive pour $|x| > 1$, p une fonction périodique de période T et b un paramètre variant dans un intervalle borné $[b_0, b_1]$. Ces équations ont commencé à être étudiées au début des années 1940 pour décrire entre autres les oscillations du courant dans certains circuits électriques. Dans le cas où $b = 0$ le système est autonome et son comportement connu depuis longtemps. Par contre, dès que b est non nul, celui-ci est beaucoup plus compliqué. Le changement de variable

$$\begin{cases} y = \dot{x} + \Phi(x) , \\ \psi = t , \end{cases}$$

où

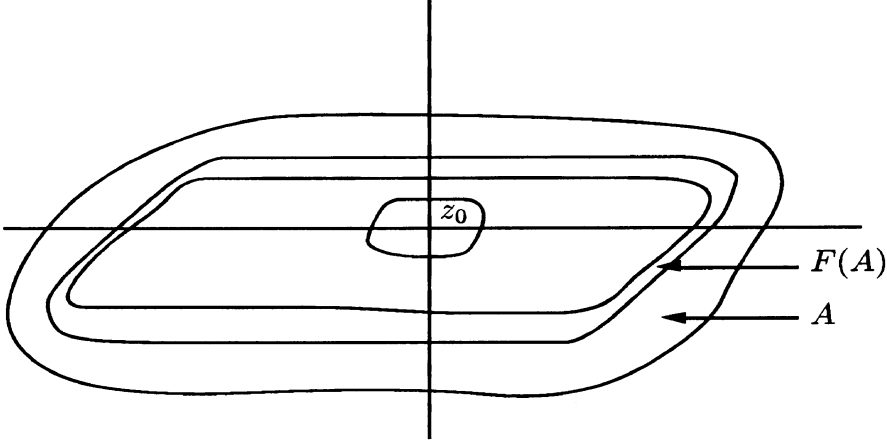
$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u) du ,$$

transforme l'équation initiale en un système qui définit un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\varepsilon}(y - \Phi(x)) , \\ \dot{y} = -\varepsilon x + bp(\psi) , \\ \dot{\psi} = 1 . \end{cases}$$

Enonçons les résultats que des expériences, puis peu de temps après, les recherches de M. L. Cartwright et J. E. Littlewood d'abord, et de N. Levinson ensuite, mirent en évidence (voir [CL], [Li1], [Li2], [Ln], [Lv]).

Soit F l'application de premier retour de la section de Poincaré d'équation $\psi = 0$ identifiée au plan $\mathbb{R}^2$, qui, à z associe sa position z^T au temps T .



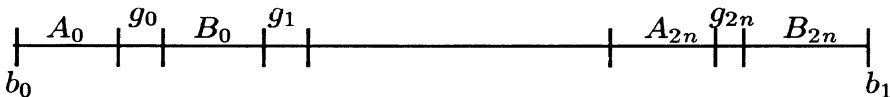
On peut trouver un anneau fermé A d'épaisseur $\sim C\varepsilon$ qui attire tous les points du plan, à l'exception d'un point fixe z_0 de F , correspondant à une orbite périodique répulsive du système, et qui est envoyé dans son intérieur par F .

L'ensemble $\Lambda = \bigcap_{k \geq 0} F^k(A)$ est alors compact, connexe et de mesure nulle, il sépare le plan en deux régions, est frontière de chacune d'elles et attire tous les points du plan à l'exception de z_0 , c'est-à-dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(F^k(z), \Lambda) = 0$, si $z \neq z_0$.

Le graphe de Φ est l'ensemble des points où la première coordonnée du champ s'annule, celle-ci est d'autant plus grande que l'on s'éloigne de ce graphe. En particulier tous les points d'une orbite de F contenue dans A restent très longtemps dans les côtés de droite et de gauche de l'anneau, ce qui, vu les propriétés de φ donne le caractère dissipatif du problème; de plus la largeur de ces côtés est très petite ($< e^{-C/\varepsilon}$).

L'intervalle $[b_0, b_1]$ se décompose ainsi :

pour chaque valeur de ε on peut écrire $[b_0, b_1]$ comme une réunion finie d'intervalles de trois types A_i , B_i et g_j , alternés comme sur le dessin qui suit ; un intervalle A_i est suivi d'un intervalle g_j , puis de l'intervalle B_i , de g_{j+1} , enfin de A_{i+1} (la décomposition peut commencer également par un B_i ou par un g_j).



Cette décomposition vérifie les propriétés suivantes :