Astérisque

JOSEPH LE POTIER

Systèmes cohérents et structures de niveau

Astérisque, tome 214 (1993)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__214__1_0>

214 ASTÉRISQUE

1993

SYSTÈMES COHÉRENTS ET STRUCTURES DE NIVEAU

Joseph LE POTIER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : 14D20 • 14F05

Table des matières

1. Introduction

Cet article est motivé par l'étude de deux espaces de modules de faisceaux semi-stables, l'un sur le plan projectif, l'autre sur l'espace projectif. Ces espaces de modules n'ont pas à priori de relation évidente entre eux, si ce n'est que les méthodes d'étude que nous employons sont très similaires, et aboutissent étrangement à des résultats assez parallèles, bien que plus compliqués sur l'espace projectif. Le premier est l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,4)$; c'est la variété des classes de S−équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern (0,4) sur le plan projectif. On sait que c'est une variété projective irréductible et normale de dimension 13. Un des objectifs de cet article est de donner une description géométrique de cet espace de modules, permettant par exemple de répondre à la question que nous nous étions posée en premier lieu, à savoir : est-il vrai que le morphisme de Barth

$$\gamma : \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,4) \to \mathbf{P}_{14}$$

où $\mathbf{P}_{14}$ est l'espace projectif des quartiques de l'espace projectif dual, qui à un faisceau semi-stable E associe la quartique de ses droites de saut est de degré 1 sur son image ? La description que nous donnons permet effectivement de répondre par l'affirmative à cette question ; ceci conduit d'ailleurs aussi au calcul du degré de l'hypersurface image de ce morphisme, qu'on appelle hypersurface des quartiques de Lüroth. Ce degré est 54 ; c'est en fait, comme l'a observé Tjurin [34] la valeur de l'invariant de Donaldson pour l'espace de modules en question, et notre travail permet donc le calcul de cet invariant ([1]). Ceci fait l'objet d'un

([1]) Pour l'espace de module $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,c_2)$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2 et classes de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 \geq 5$ sur $\mathbf{P}_2$ la question de autre travail déjà exposé [17], mais dont la rédaction n'est pas terminée.

Sur l'espace projectif, nous nous sommes intéressés à l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(2; 0, 2, 0)$ des classes de S$-$équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2, de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 2, c_3 = 0$ sur l'espace projectif $\mathbf{P_3}$. G. Trautman a prouvé récemment [33] que cette variété projective a trois composantes irréductibles de dimensions respectives 13, 17, 21 ; la composante de dimension 13 est l'adhérence de l'ouvert correspondant aux fibrés stables de rang 2 de classes de Chern (0,2), étudié par Hartshorne [12] , Douady [5] ; cette composante a été étudiée, plus récemment, par Narasimhan et Trautman [26] . Notre étude donne une autre façon de comprendre les trois composantes de Trautmann ; elle fournit en fait des renseignements beaucoup plus complets concernant les singularités, la rationalité de ces composantes, et le problème de l'existence d'un faisceau universel. Toutefois, nous ne savons pas pour l'instant si cet espace de modules est réduit, mais c'est vraisemblable. Résoudre ce problème demanderait sans doute une étude plus poussée du cône de l'espace de modules aux points d'intersection de ces composantes.

On sait que C. Simpson a construit [31] pour les faisceaux semi-stables de torsion de polynôme de Hilbert fixé P sur une variété projective X polarisée un espace de modules grossier $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$. Dans cet article, nous donnons une description l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m)$ des classes de S$-$équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$. Il s'agit ici de faisceaux semi-stables dont le support est une quadrique de $\mathbf{P}_3$. Ces faisceaux jouent un rôle intermédiaire mais fondamental dans l'étude du module de Trautmann ci-dessus. Il n'a que deux composantes irréductibles de dimension respectives 9 et 13, dont les points génériques correspondent sur une quadrique lisse C aux faisceaux qui s'écrivent $\mathscr{O}_{\mathrm{C}}(-1, 2)$ et aux faisceaux de sections du fibré $\mathscr{O}_{\mathrm{C}}(1, 0)$ qui s'annulent en deux points, un isomorphisme $\mathrm{C} \simeq \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ étant convenablement choisi.

---

savoir si le morphisme γ (qui associe à un faisceau semi-stable la courbe, de degré c_2, des droites de saut dans le plan projectif dual) est de degré 1 sur son image reste, à ma connaissance, une question ouverte. Il est de même du calcul du degré de l'image. Ce calcul est lié au calcul de l'invariant de Donaldson $(c_1(\mathscr{D}))^{4c_2-3}$, où $\mathscr{D}$ est le fibré déterminant (*cf.* [18]).

1.1. Systèmes cohérents sur le plan projectif.

L'introduction de cette notion est justifiée par l'étude de l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,4)$, étude qui est abordée au chapitre 6 (*cf.* théorème 6.5 et corollaire 6.8). On a déjà dit que l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,4)$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2, de classes de Chern (0,4) sur le plan projectif $\mathbf{P}_2$ est une variété projective irréductible, normale de dimension 13 ; son lieu singulier est de dimension 8. La description de cette variété repose sur l'idée suivante : il est facile [16] de construire une équivalence birationnelle entre $\mathbf{M}$ et la variété des systèmes linéaires de dimension 1, de degré 5 sur les coniques lisses de $\mathbf{P}_2$. En effet, pour tout faisceau stable E de rang 2, de classes de Chern (0,4) sur le plan projectif l'espace vectoriel des sections de E(1) est de dimension 2 en dehors d'une sous-variété lisse de codimension 3 de $\mathbf{M}$; pour E suffisamment général, le schéma des zéros du déterminant du morphisme d'évaluation $ev : \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathrm{E}(1)$ est une conique lisse C et le conoyau $\mathrm{F} = \mathrm{coker}\ \ ev$ est alors un module localement libre de rang un de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathrm{F}) = 0$ sur la conique C. La suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \xrightarrow{ev} \mathrm{E}(1) \to \mathrm{F} \to 0$$

fournit par dualité un sous-espace vectoriel Γ^* de dimension 2 dans l'espace vectoriel des extensions $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$. Cet espace vectoriel s'identifie à l'espace vectoriel des sections du faisceau $\mathrm{F}^* := \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2})$ "dual" de F. Ce faisceau F^* s'identifie à un faisceau inversible sur la conique C, de degré 5 . Ainsi, on associe au faisceau E la paire (Γ^*, F) : c'est un système linéaire de dimension projective 1, de degré 5 sur la conique C. Ces paires (Γ^*, F) décrivent un ouvert d'un fibré en grassmanniennes au-dessus de l'ouvert des coniques lisses dans l'espace projectif $\mathbf{P}_5$ des coniques du plan projectif. Notre problème est donc de construire une compactification de la variété des systèmes linéaires de dimension 2 et de degré 5, qui permette d'étendre la correspondance birationnelle ci-dessus.

De manière plus précise, il s'agit de construire un diagramme de variétés projectives

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S} & \xrightarrow{q} & \mathbf{P}_5 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \mathbf{M} & & \end{array}$$

où p est un morphisme birationnel, et où $\mathbf{P}_5$ est la variété des coniques du plan projectif $\mathbf{P}_2$. La variété $\mathbf{S}$ sera constituée de classes d'équivalence de paires $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ où E est un faisceau sans torsion de rang 2, de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 2$, et Γ un sous-espace de dimension 2 de $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1))$, ces paires étant soumises à une condition de semi-stabilité qui sera décrite au chapitre 4. Un telle paire sera un cas particulier de ce que nous appellerons structure de niveau, car ceci nous rappelle une construction qu'avait donnée Seshadri sur les courbes ; il s'agit en fait de la généralisation qui convient en dimension supérieure. Le morphisme p qui associe au point défini par la structure de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ le point de $\mathbf{M}$ défini par E sera en fait l'éclatement d'une sous-variété lisse de codimension 3, correspondant aux classes de faisceaux semi-stables E tels que $h^0(\mathrm{E}(1)) = 3$, sous-variété des points dits spéciaux, qui évite les singularités de $\mathbf{M}$.

Une telle structure de niveau s'interprète aussi comme classe d'équivalence de paires (Γ^*, F) où cette fois F est un faisceau algébrique cohérent de polynôme de Hilbert $2m + 6$, dont le support est une conique, et Γ^* un sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^0(\mathrm{F})$. Cette conique peut être singulière, voire non réduite : il apparaît donc nécessaire d'introduire de telles paires (Γ^*, F) où F est un faisceau cohérent de dimension d et de définir une notion de semi-stabilité pour de telles paires. De telles paires, qui généralisent les systèmes de niveau, seront appelées systèmes cohérents sur le plan projectif. Réciproquement, la donnée d'un tel système cohérent semi-stable équivaut à celle d'une structure de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$. Bien entendu de telles notions peuvent être introduites sur n'importe quelle variété projective lisse, et la correspondance qu'on vient d'expliquer dans le cas particulier du plan projectif peut être généralisée sur les surfaces projectives. Sur les variétés de dimension ≥ 3, il est en revanche nécessaire pour obtenir une telle correspondance d'introduire une notion en quelque sorte duale, que nous appelons cosystèmes cohérents.

La description donnée ci-dessus est très utile pour l'étude du morphisme γ qui associe à un faisceau semi-stable sa courbe des droites de saut. Un système cohérent semi-stable (Γ^*, F) pour lequel le faisceau F a pour support une conique dégénérée en deux droites distinctes fournit une quartique de Lüroth singulière, et en général, il est possible de reconstruire le système cohérent (Γ^*, F), et donc le faisceau semi-stable E à partir des éléments géométriques visibles sur la quartique singulière. C'est ce qui nous permet de démontrer que le morphisme γ est de degré 1 sur son image ; les détails de la construction font l'objet d'un autre article. Reconstruire le faisceau E à partir d'une quartique de Lüroth est un problème qui a été aussi envisagé par d'autres auteurs pour les quartiques de Lüroth lisses, mais à ma connaissance ce projet n'a pas abouti.

1.2. Le module de Trautmann

L'étude de l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(2; 0, 2, 0)$ des classes de S−équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2, de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}_3$ fait l'objet du chapitre 7 (*cf.* théorèmes 7.12, 7.20, 7.23). La description des composantes irréductibles de Trautmann est liée au nombre de points de profondeur 1 que peuvent présenter ces faisceaux. En fait, tout faisceau cohérent sans torsion sur une variété algébrique lisse de dimension 3 a au plus un nombre fini i de points de profondeur 1. Dans le cas des faisceaux semi-stables de rang 2 de classes de Chern $(0, 2, 0)$ sur l'espace projectif, on a $i \leq 2$; ceci peut s'obtenir comme l'a remarqué Trautmann [33] en étudiant le bidual d'un tel faisceau : c'est un faisceau réflexif de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0$, $0 \leq c_2 \leq 2$ auquel on peut appliquer les résultats de Hartshorne sur la majoration de la classe de Chern c_3 en fonction de c_1 et c_2. Cette analyse repose sur la théorie du spectre introduite d'abord par Barth et Elencwajg [3] pour les fibrés vectoriels de rang 2 sur l'espace projectif et généralisée aux faisceaux réflexifs par Hartshorne [12]. La méthode présentée ici est radicalement différente. Elle se ramène essentiellement à l'application des inégalités

$$c_2 - \frac{c_1^2}{4} \geq 0$$

pour les fibrés semi-stables sur une surface projective, attribuées par habitude à Bogomolov, mais qui dans le cas qui nous intéresse (sur le plan projectif) sont dues à Schwarzenberger. On doit en fait passer par l'intermédiaire de faisceaux cohérents sur l'espace projectif, portés par des quadriques.

Notre méthode permet en outre d'obtenir des résultats bien plus précis sur ces composantes. On introduit pour ceci les sous-variétés déterminantielles $\mathbf{M}_i$ de