

Astérisque

CLAUDE SABBAH

**Équations différentielles à points singuliers irréguliers
et phénomène de Stokes en dimension 2**

Astérisque, tome 263 (2000)

http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__263__R1_0

© Société mathématique de France, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRIQUE 263

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
À POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS
ET PHÉNOMÈNE DE STOKES
EN DIMENSION 2

Claude Sabbah

Société Mathématique de France 2000
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Claude Sabbah

UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques, École polytechnique,
F-91128 Palaiseau cedex, France.

E-mail : sabbah@math.polytechnique.fr

Url : <http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html>

Classification mathématique par sujets (1991). — 32C38, 32C45, 35A20, 35A27.

Mots clefs. — Connexion méromorphe, \mathcal{D} -module holonome, éclatement, éclatement réel, irrégularité, polygone de Newton, phénomène de Stokes.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS ET PHÉNOMÈNE DE STOKES EN DIMENSION 2

Claude Sabbah

Résumé. — La théorie asymptotique des équations différentielles linéaires d'une variable complexe est comprise depuis longtemps et a fait l'objet de travaux récents autour de la multisommation. Par contre, la théorie asymptotique des systèmes différentiels holonomes de plusieurs variables est encore peu développée. Ce volume tente de combler partiellement cette lacune en introduisant les notions fondamentales et en montrant des conséquences d'une telle théorie.

On introduit la notion de bonne structure formelle pour un fibré méromorphe à connexion plate sur une surface analytique complexe et on conjecture l'existence d'une telle structure après une suite convenable d'éclatements ponctuels. On donne des conséquences de cette conjecture : semi-continuité de l'irrégularité de Malgrange-Komatsu pour une famille intégrable de connexions méromorphes sur une courbe complexe et construction et propriétés de la fibration de Stokes. La démonstration de cette conjecture est donnée notamment pour les fibrés de rang ≤ 5 .

On montre aussi qu'une bonne structure formelle se relève au niveau des développements asymptotiques sectoriels et on donne des applications à la conjugaison complexe des \mathcal{D} -modules holonomes.

Abstract (Differential equations with irregular singular points and Stokes phenomenon in dimension 2)

The asymptotic theory of holomorphic linear differential equations of one variable is well understood and has recently been renewed by the theory of multisummation. However, the asymptotic theory of holonomic differential systems of many complex variables is still not completely developed. This volume tries to fill the gap by introducing the fundamental notions and by showing some consequences of such a theory.

The notion of a good formal structure for a meromorphic vector bundle with a flat connection on a complex analytic surface is introduced. The existence of such a good formal structure on the pull-back by a suitable sequence of complex blowing-up of a meromorphic connection is conjectured. Some consequences of this conjecture are given: semi-continuity of the Malgrange-Komatsu irregularity index for an integrable family of meromorphic connections on a complex curve, and the construction and

some properties of the Stokes fibration. The proof of the conjecture is given, among others, for bundles of rank ≤ 5 .

The existence of a lifting of a good formal structure at the level of asymptotic expansions in bisectors is also shown. Applications are given to complex conjugation of holonomic \mathcal{D} -modules.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I. Structure formelle des connexions méromorphes	5
1. Préliminaires sur les connexions méromorphes	5
1.1. Fonctions méromorphes et fonctions méromorphes formelles	5
1.2. Connexions méromorphes	6
1.3. Image inverse par éclatements	8
2. Bonne structure formelle	9
2.1. Modèles élémentaires et bonne structure formelle	9
2.2. Très bonne structure formelle	11
2.3. Existence générique d'une bonne structure formelle	13
2.4. Convergence des facteurs exponentiels	17
2.5. Existence après éclatements	19
3. Propriétés globales	21
3.1. Variétés r -caractéristiques	21
3.2. Semi-continuité de l'irrégularité	22
3.3. Variétés \mathfrak{h} -caractéristiques	27
3.4. Secteurs et fibration de Stokes	28
II. Structure analytique des connexions méromorphes	39
1. Préliminaires	39
1.1. Faisceaux sur l'éclaté réel	39
1.2. Théorèmes du type Malgrange-Sibuya	45
1.3. Théorème d'existence et d'unicité	47
2. Bonne \mathcal{A} -structure	50
2.1. Existence d'une bonne \mathcal{A} -structure	50
2.2. Classification locale des connexions méromorphes admettant une bonne \mathcal{A} -décomposition	57
3. Solutions distributions	63
3.1. Une conjecture de M. Kashiwara	63
3.2. Réductions préliminaires	65
3.3. Fin de la démonstration	68
3.4. Quelques applications	72

III. Bonne structure formelle après éclatements	75
0. Introduction	75
1. Préliminaires	80
1.1. Suites d'éclatements locaux et centres permis	81
1.2. Éclatements toriques	82
1.3. Première réduction	84
2. Cas particuliers de réduction	88
2.1. Connexions avec \mathcal{D}_1 régulier	88
2.2. Connexions de rang 1	90
2.3. Décomposition suivant les valeurs propres	91
2.4. Un cas particulier	93
2.5. Singularités inexistantes	94
3. Réduction logarithmique de 1-formes différentielles méromorphes	96
3.1. Formes méromorphes réduites	96
3.2. Démonstration du théorème 3.1.7 (préliminaires)	100
3.3. Réduction de l'invariant apparent	106
3.4. Fin de la démonstration du théorème 3.1.7	111
4. Réduction au cas d'une partie principale nilpotente	112
4.1. Réduction au cas nilpotent	112
4.2. Déterminant régulier	113
4.3. Réduction torique	114
4.4. Cas d'une partie principale nilpotente	118
4.5. Interlude: transformation de Fourier	118
5. Le cas nilpotent: préliminaires	127
5.1. Polygone de Newton et pondérations	127
5.2. Bases admissibles	133
5.3. Conséquences de la condition d'intégrabilité	142
5.4. Démonstration de l'énoncé 4.4.1 dans le cas favorable	145
5.5. Obstruction à la réduction de $\Omega^{\geq -1}$ dans une base admissible	148
6. La résonance nilpotente	153
6.1. Nouvelle apparence	155
6.2. Réduction à 0 de l'invariant apparent ${}^\alpha \mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1})$	156
6.3. Obstruction à la \mathfrak{p}_0 -réduction de $\Omega^{\geq -1}$ dans une base admissible	159
6.4. Démonstration de la proposition 6.0.2	162
6.5. Élimination de la résonance nilpotente	167
Appendice	171
A. Orbites de matrices nilpotentes	171
A.1. Jacobson-Morosov	171
A.2. Perturbation primitive et quasi-primitive	172
B. Fonctions C^∞ sur l'éclaté réel et développements asymptotiques	175
B.1. Le lemme de Borel-Ritt	175
B.2. Développements asymptotiques	178
B.3. Lemmes de Dolbeault-Grothendieck sur l'éclaté réel	179
B.4. Une suite exacte du type Mayer-Vietoris	180

Bibliographie	183
Index	189

INTRODUCTION

Une *connexion méromorphe* sur une variété analytique complexe X , à pôles le long d'un diviseur (réduit) $Z \subset X$ est un $\mathcal{O}_X[*Z]$ -module cohérent \mathcal{M} (où $\mathcal{O}_X[*Z]$ est le faisceau des fonctions méromorphes sur X à pôles le long de Z) muni d'une connexion plate $\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{M}$. Cette notion généralise celle de système différentiel linéaire en dimension 1 (voir [19]).

Dans la suite, nous supposerons en général que X est une surface et Z une courbe. En effet c'est seulement dans cette situation que nous pouvons donner des informations sur la structure formelle d'une telle connexion (après éclatements) au voisinage de tout point de Z . Des résultats analogues en toute dimension semblent pour le moment hors d'atteinte. Néanmoins on peut penser que les résultats obtenus ici en dimension 2 sont aussi vrais en toute dimension.

En dimension 2 une telle connexion est localement libre sur $\mathcal{O}[*Z]$ et la donnée de ∇ correspond, dans des coordonnées locales (x_1, x_2) , à la donnée de matrices $A_1(x_1, x_2)$ et $A_2(x_1, x_2)$ à pôles le long de Z satisfaisant la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 = [A_1, A_2].$$

Le cas où la connexion est régulière (on dit aussi à singularité régulière) est bien compris en toute dimension (voir [19], voir aussi [43] et [52]). On dispose en particulier d'une correspondance qui rend équivalente la catégorie de ces connexions avec celle des représentations linéaires de dimension finie du groupe fondamental de $X - Z$.

Pour les systèmes différentiels linéaires en dimension 1, le cas des singularités irrégulières est maintenant bien compris, après les travaux de Hukuhara, Turrin, Sibuya, Malgrange, Ramis et bien d'autres auteurs (voir notamment le classique [64] et les articles d'exposition [32, 62, 63] pour des résultats plus récents). Alors que les solutions de systèmes linéaires à singularités régulières sont au plus à croissance modérée près du point singulier, celles des systèmes à singularités irrégulières peuvent