CLAUDE SABBAH

Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2

Astérisque, tome 263 (2000)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__263__R1_0>

ASTÉRISQUE 263

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS ET PHÉNOMÈNE DE STOKES EN DIMENSION 2

Claude Sabbah

Société Mathématique de France 2000
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Claude Sabbah
UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques, École polytechnique,
F–91128 Palaiseau cedex, France.
E-mail : sabbah@math.polytechnique.fr
Url : http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 32C38, 32C45, 35A20, 35A27.

Mots clefs. — Connexion méromorphe, $\mathcal{D}$-module holonome, éclatement, éclatement réel, irrégularité, polygone de Newton, phénomène de Stokes.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS ET PHÉNOMÈNE DE STOKES EN DIMENSION 2

Claude Sabbah

Résumé. — La théorie asymptotique des équations différentielles linéaires d'une variable complexe est comprise depuis longtemps et a fait l'objet de travaux récents autour de la multisommation. Par contre, la théorie asymptotique des systèmes différentiels holonomes de plusieurs variables est encore peu développée. Ce volume tente de combler partiellement cette lacune en introduisant les notions fondamentales et en montrant des conséquences d'une telle théorie.

On introduit la notion de bonne structure formelle pour un fibré méromorphe à connexion plate sur une surface analytique complexe et on conjecture l'existence d'une telle structure après une suite convenable d'éclatements ponctuels. On donne des conséquences de cette conjecture : semi-continuité de l'irrégularité de Malgrange-Komatsu pour une famille intégrable de connexions méromorphes sur une courbe complexe et construction et propriétés de la fibration de Stokes. La démonstration de cette conjecture est donnée notamment pour les fibrés de rang $\leqslant 5$.

On montre aussi qu'une bonne structure formelle se relève au niveau des développements asymptotiques sectoriels et on donne des applications à la conjugaison complexe des $\mathcal{D}$-modules holonomes.

***Abstract* (Differential equations with irregular singular points and Stokes phenomenon in dimension 2)**

The asymptotic theory of holomorphic linear differential equations of one variable is well understood and has recently been renewed by the theory of multisummation. However, the asymptotic theory of holonomic differential systems of many complex variables is still not completely developed. This volume tries to fill the gap by introducing the fundamental notions and by showing some consequences of such a theory.

The notion of a good formal structure for a meromorphic vector bundle with a flat connection on a complex analytic surface is introduced. The existence of such a good formal structure on the pull-back by a suitable sequence of complex blowing-up of a meromorphic connection is conjectured. Some consequences of this conjecture are given: semi-continuity of the Malgrange-Komatsu irregularity index for an integrable family of meromorphic connections on a complex curve, and the construction and

some properties of the Stokes fibration. The proof of the conjecture is given, among others, for bundles of rank $\leqslant 5$.

The existence of a lifting of a good formal structure at the level of asymptotic expansions in bisectors is also shown. Applications are given to complex conjugation of holonomic $\mathcal{D}$-modules.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Une *connexion méromorphe* sur une variété analytique complexe X, à pôles le long d'un diviseur (réduit) $Z \subset X$ est un $\mathcal{O}_X[*Z]$-module cohérent $\mathcal{M}$ (où $\mathcal{O}_X[*Z]$ est le faisceau des fonctions méromorphes sur X à pôles le long de Z) muni d'une connexion *plate* $\nabla : \mathcal{M} \to \Omega^1_X \otimes \mathcal{M}$. Cette notion généralise celle de système différentiel linéaire en dimension 1 (voir **[19]**).

Dans la suite, nous supposerons en général que X est une surface et Z une courbe. En effet c'est seulement dans cette situation que nous pouvons donner des informations sur la structure formelle d'une telle connexion (après éclatements) au voisinage de tout point de Z. Des résultats analogues en toute dimension semblent pour le moment hors d'atteinte. Néanmoins on peut penser que les résultats obtenus ici en dimension 2 sont aussi vrais en toute dimension.

En dimension 2 une telle connexion est localement libre sur $\mathcal{O}[*Z]$ et la donnée de ∇ correspond, dans des coordonnées locales (x_1, x_2), à la donnée de matrices $A_1(x_1, x_2)$ et $A_2(x_1, x_2)$ à pôles le long de Z satisfaisant la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 = [A_1, A_2].$$

Le cas où la connexion est régulière (on dit aussi à singularité régulière) est bien compris en toute dimension (voir **[19]**, voir aussi **[43]** et **[52]**). On dispose en particulier d'une correspondance qui rend équivalente la catégorie de ces connexions avec celle des représentations linéaires de dimension finie du groupe fondamental de $X - Z$.

Pour les sytèmes différentiels linéaires en dimension 1, le cas des singularités irrégulières est maintenant bien compris, après les travaux de Hukuhara, Turrittin, Sibuya, Malgrange, Ramis et bien d'autres auteurs (voir notamment le classique **[64]** et les articles d'exposition **[32, 62, 63]** pour des résultats plus récents). Alors que les solutions de systèmes linéaires à singularités régulières sont au plus à croissance modérée près du point singulier, celles des systèmes à singularités irrégulières peuvent