JACQUES FRANCHETEAU
GUY MÉTIVIER

Existence de chocs faibles pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels

Astérisque, tome 268 (2000)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__268__R1_0>

ASTÉRISQUE 268

EXISTENCE DE CHOCS FAIBLES POUR DES SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES HYPERBOLIQUES MULTIDIMENSIONNELS

Jacques Francheteau
Guy Métivier

Société Mathématique de France 2000
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Jacques Francheteau
Écoles de Saint-Cyr Coëtquidan, CREC, 56381 Guer Cedex.

Guy Métivier
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.
E-mail : `Guy.Metivier@univ-rennes1.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35L67, 35L65, 35L50, 76L05.

Mots clefs. — Systèmes de lois de conservations, ondes de choc, problèmes mixtes hyperboliques non linéaires, frontières libres, stabilité, calcul paradifférentiel, schémas de Nash-Moser.

EXISTENCE DE CHOCS FAIBLES POUR DES SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES HYPERBOLIQUES MULTIDIMENSIONNELS

Jacques Francheteau, Guy Métivier

Résumé. — L'objet de ce travail est l'étude des chocs faibles pour des systèmes de lois de conservation en dimension d'espace deux ou plus. Le résultat principal est la construction dans un domaine indépendant du paramètre ε, de familles de solutions u^ε ayant une discontinuité sur une hypersurface Σ^ε avec un saut d'amplitude d'ordre de grandeur ε. Le problème à ε fixé a été résolu par A. Majda, comme un problème mixte hyperbolique non linéaire à frontière libre non caractéristique. Lorsque ε tend vers 0, le front tend à devenir caractéristique et on doit faire face à un problème de type perturbation singulière avec perte de stabilité et de régularité. Ces pertes mettent en échec les méthodes classiques d'obtention des estimations *a priori* par dérivation de l'équation et de construction de solutions par des schémas itératifs de type Picard. On est conduit à utiliser des outils plus sophistiqués, comme le calcul paradifférentiel pour les estimations *a priori* et les schémas de type Nash-Moser pour la construction des solutions. Une application importante des résultats concerne les équations d'Euler de la dynamique des gaz. On peut ainsi construire des familles de chocs faibles aussi bien dans le cas du système d'Euler complet que dans le cas du système isentropique. Nos résultats permettent aussi de comparer ces deux familles de chocs faibles.

***Abstract* (Existence of weak shocks for multidimensional quasi-linear hyperbolic systems)**

In this work, we consider weak shocks for systems of conservation laws in any space dimension. The main result is the construction on a space-time domain independent of the parameter ε, of families of weak solutions u^ε, discontinuous along a smooth hypersurface Σ^ε, with jumps of order ε. For a fixed ε, the problem can be recast as a nonlinear mixed hyperbolic problem with a free noncharacteristic boundary. It has been solved by A. Majda. When ε tends to zero, the front tends to be characteristic. This induces a loss of of stability and regularity. As a consequence, the classical nonlinear methods based on Picard's iterations and differentiation of the equations do not apply. In this work, to prove the suitable *a priori* estimates and to construct the solutions, we use more sophisticated methods such as the para-differential calculus and Nash-Moser's type iteration schemes. An important application of our results concerns Euler's equations of gas dynamics. They apply to the full system and to the isentropic system. We construct and compare weak shock solutions of these two systems.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Énoncé du problème

Au début des années 80, A. Majda ([Ma2], voir aussi [Ma3]) a montré comment construire des ondes de choc pour des systèmes $N \times N$ de lois de conservation multi-dimensionnelles :

$$\sum_{j=0}^{n} \partial_j f_j(u) = 0. \tag{1.1.1}$$

Les flux f_j sont des applications C^∞ d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Le système est supposé hyperbolique symétrique dans la direction x_0, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $S(u)$ telle que les matrices $S(u)f_j'(u)$ sont symétriques et $S(u)f_0'(u)$ est définie positive. Cette hypothèse est satisfaite par de nombreux exemples physiques et en particulier dès que le système admet une entropie strictement convexe (*cf.* par exemple [Fr-La1], [Se]). La dimension d'espace est n et x_0 est la variable de temps, qu'on note aussi t.

Un choc est une solution faible de (1.1.1), discontinue à travers une hypersurface Σ, régulière jusqu'au bord de part et d'autre de Σ. Quitte à changer de repère, on peut supposer qu'en coordonnées locales, le *front* est d'équation

$$\Sigma := \{x_n = \phi(y)\}, \qquad y := (x_0, \dots, x_{n-1}). \tag{1.1.2}$$

On s'intéresse alors à des fonctions $u^\pm$ sur $\Omega_\pm := \{\pm(x_n - \phi(y)) > 0\}$, régulières jusqu'au bord Σ. La fonction

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } x_n > \phi(y) \\ u^-(x) & \text{si } x_n < \phi(y) \end{cases} \tag{1.1.3}$$

est solution faible de (1.1.1), si et seulement si u^+ et u^- sont solutions classiques de (1.1.1) respectivement sur Ω_+ et Ω_- et si leurs traces sur Σ vérifient les *conditions de Rankine-Hugoniot*

$$\sum_{j=0}^{n} \nu_j [f_j(u)] = 0 \quad \text{sur } \Sigma \tag{1.1.4}$$

où $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_n)$ est la normale à Σ et $[f] = f(u^+) - f(u^-)$ désigne comme d'habitude le saut de $f(u)$ sur Σ (voir par exemple [La] ou [Se], [Go-Ra]).