

Astérisque

JACQUES FRANCHETEAU

GUY MÉTIVIER

Existence de chocs faibles pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels

Astérisque, tome 268 (2000)

http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__268__R1_0

© Société mathématique de France, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRISQUE 268

**EXISTENCE DE CHOCS FAIBLES
POUR DES SYSTÈMES
QUASI-LINÉAIRES HYPERBOLIQUES
MULTIDIMENSIONNELS**

**Jacques Francheteau
Guy Métivier**

Société Mathématique de France 2000
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Jacques Francheteau

Écoles de Saint-Cyr Coëtquidan, CREC, 56381 Guer Cedex.

Guy Métivier

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.

E-mail : Guy.Metivier@univ-rennes1.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 35L67, 35L65, 35L50, 76L05.

Mots clefs. — Systèmes de lois de conservations, ondes de choc, problèmes mixtes hyperboliques non linéaires, frontières libres, stabilité, calcul paradifférentiel, schémas de Nash-Moser.

**EXISTENCE DE CHOCS FAIBLES
POUR DES SYSTÈMES
QUASI-LINÉAIRES HYPERBOLIQUES
MULTIDIMENSIONNELS**

Jacques Francheteau, Guy Métivier

Résumé. — L'objet de ce travail est l'étude des chocs faibles pour des systèmes de lois de conservation en dimension d'espace deux ou plus. Le résultat principal est la construction dans un domaine indépendant du paramètre ε , de familles de solutions u^ε ayant une discontinuité sur une hypersurface Σ^ε avec un saut d'amplitude d'ordre de grandeur ε . Le problème à ε fixé a été résolu par A. Majda, comme un problème mixte hyperbolique non linéaire à frontière libre non caractéristique. Lorsque ε tend vers 0, le front tend à devenir caractéristique et on doit faire face à un problème de type perturbation singulière avec perte de stabilité et de régularité. Ces pertes mettent en échec les méthodes classiques d'obtention des estimations *a priori* par dérivation de l'équation et de construction de solutions par des schémas itératifs de type Picard. On est conduit à utiliser des outils plus sophistiqués, comme le calcul paradifférentiel pour les estimations *a priori* et les schémas de type Nash-Moser pour la construction des solutions. Une application importante des résultats concerne les équations d'Euler de la dynamique des gaz. On peut ainsi construire des familles de chocs faibles aussi bien dans le cas du système d'Euler complet que dans le cas du système isentropique. Nos résultats permettent aussi de comparer ces deux familles de chocs faibles.

Abstract (Existence of weak shocks for multidimensional quasi-linear hyperbolic systems)

In this work, we consider weak shocks for systems of conservation laws in any space dimension. The main result is the construction on a space-time domain independent of the parameter ε , of families of weak solutions u^ε , discontinuous along a smooth hypersurface Σ^ε , with jumps of order ε . For a fixed ε , the problem can be recast as a nonlinear mixed hyperbolic problem with a free noncharacteristic boundary. It has been solved by A. Majda. When ε tends to zero, the front tends to be characteristic. This induces a loss of stability and regularity. As a consequence, the classical nonlinear methods based on Picard's iterations and differentiation of the equations do not apply. In this work, to prove the suitable *a priori* estimates and to construct the solutions, we use more sophisticated methods such as the para-differential calculus and Nash-Moser's type iteration schemes. An important application of our results concerns Euler's equations of gas dynamics. They apply to the full system and to the isentropic system. We construct and compare weak shock solutions of these two systems.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
1.1. Énoncé du problème	1
1.2. La stratégie générale. Techniques mises en jeu	3
1.3. Exemples	18
1.4. Plan de l'article	20
2. Résultats principaux	21
2.1. Le système	21
2.2. Chocs faibles	22
2.3. Changements de variables	23
2.4. Données de Cauchy	27
2.5. Un exemple	29
2.6. Le résultat principal	29
2.7. Prolongement d'une solution locale dans les variables initiales	31
2.8. Convergence des solutions vers l'onde sonique	32
2.9. Application au système d'Euler de la dynamique des gaz	33
3. Les étapes des preuves	37
3.1. Solutions approchées	37
3.2. Les équations pour le problème non-linéaire	39
3.3. Les estimations a priori pour le problème non-linéaire	41
3.4. Théorème de prolongement à ε fixé	44
3.5. Temps d'existence a priori et preuve du théorème 2.6.2	44
3.6. Prolongement d'un choc faible. Preuve du théorème 2.7.1	46
4. Estimations préliminaires	49
4.1. Inégalités non linéaires	49
4.2. Estimations L^∞	51

5. Opérateurs de traces et de relèvement de traces	53
5.1. Un lemme de trace	53
5.2. Construction d'un opérateur de relèvement de trace	54
5.3. Action de \mathcal{R} dans les espaces $W^{k,\infty}$	56
5.4. Action de \mathcal{R} dans les espaces H^s	58
6. Compatibilités. Constructions de solutions approchées	61
6.1. Développement de Taylor des solutions	61
6.2. Conditions de compatibilités	63
6.3. Construction d'une famille de données initiales compatibles globales ...	67
6.4. Construction d'une famille de solutions approchées	70
6.5. Données initiales compatibles locales. Prolongement	74
6.6. Solutions approchées locales. Prolongement	76
6.7. Solutions locales exactes dans le passé. Prolongement	79
7. Paralinéarisation	83
7.1. Le paraproduit	83
7.2. Généralités sur l'équation (3.2.3)	88
7.3. Paralinéarisation de l'équation pour le problème linéaire	90
7.4. Paralinéarisation de l'équation pour le problème non-linéaire	95
7.5. Paralinéarisation des conditions aux limites pour le problème linéaire ..	95
7.6. Paralinéarisation des conditions aux limites pour le problème non-linéaire	97
8. Estimations d'énergie conormales	105
8.1. La stabilité L^2	105
8.2. Estimations pour le problème paradifférentiel	106
8.3. Estimation d'énergie pour le problème non-linéaire	110
8.4. Estimation d'énergie pour le problème linéaire	112
9. Estimations a priori pour le problème non-linéaire	115
9.1. Estimation de $\partial_n u$	115
9.2. Estimations des dérivées normales	121
9.3. Estimation du saut de u	122
9.4. Estimation de Φ	125
9.5. Estimation a priori principale. Preuve du théorème 3.3.3	128
10. Le théorème de prolongement à ε fixé	131
10.1. Énoncé du résultat	131
10.2. Opérateurs de régularisation	134
10.3. Description du schéma itératif	136
10.4. Estimations douces	142
10.5. Hypothèse de récurrence	148
10.6. Estimations de \hat{F}_ν , \hat{G}_ν et $\hat{\beta}_\nu$	150
10.7. Preuve du théorème 10.1.1	153

11. Prolongement de la régularité	159
11.1. Énoncé du résultat	159
11.2. Opérateurs de régularisation	161
11.3. Régularité tangentielle	165
11.4. Régularité conormale	172
11.5. Preuve du théorème 11.1.2	174
12. Application au système d'Euler. Comparaison des solutions	177
12.1. Le système d'Euler de la dynamique des gaz	177
12.2. Le système d'Euler isentropique	179
12.3. Le théorème de comparaison	182
12.4. Comparaison des solutions approchées	184
12.5. Le problème linéaire pour $(V, \Gamma\Psi)$	185
12.6. Inégalités d'énergie pour $(v, \Gamma\Psi)$	186
12.7. Estimation de Ψ	188
12.8. Estimation du saut de v	190
12.9. Preuve du théorème 12.3.4	192
Bibliographie	195

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Énoncé du problème

Au début des années 80, A. Majda ([Ma2], voir aussi [Ma3]) a montré comment construire des ondes de choc pour des systèmes $N \times N$ de lois de conservation multidimensionnelles :

$$(1.1.1) \quad \sum_{j=0}^n \partial_j f_j(u) = 0.$$

Les flux f_j sont des applications C^∞ d'un ouvert de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N . Le système est supposé hyperbolique symétrique dans la direction x_0 , c'est-à-dire qu'il existe une matrice $S(u)$ telle que les matrices $S(u)f'_j(u)$ sont symétriques et $S(u)f'_0(u)$ est définie positive. Cette hypothèse est satisfaite par de nombreux exemples physiques et en particulier dès que le système admet une entropie strictement convexe (*cf.* par exemple [Fr-La1], [Se]). La dimension d'espace est n et x_0 est la variable de temps, qu'on note aussi t .

Un choc est une solution faible de (1.1.1), discontinue à travers une hypersurface Σ , régulière jusqu'au bord de part et d'autre de Σ . Quitte à changer de repère, on peut supposer qu'en coordonnées locales, le *front* est d'équation

$$(1.1.2) \quad \Sigma := \{x_n = \phi(y)\}, \quad y := (x_0, \dots, x_{n-1}).$$

On s'intéresse alors à des fonctions u^\pm sur $\Omega_\pm := \{\pm(x_n - \phi(y)) > 0\}$, régulières jusqu'au bord Σ . La fonction

$$(1.1.3) \quad u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } x_n > \phi(y) \\ u^-(x) & \text{si } x_n < \phi(y) \end{cases}$$

est solution faible de (1.1.1), si et seulement si u^+ et u^- sont solutions classiques de (1.1.1) respectivement sur Ω_+ et Ω_- et si leurs traces sur Σ vérifient les *conditions de Rankine-Hugoniot*

$$(1.1.4) \quad \sum_{j=0}^n \nu_j [f_j(u)] = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

où $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_n)$ est la normale à Σ et $[f] = f(u^+) - f(u^-)$ désigne comme d'habitude le saut de $f(u)$ sur Σ (voir par exemple [La] ou [Se], [Go-Ra]).