JEAN-MICHEL BISMUT
SEBASTIAN GOETTE

Families torsion and Morse functions

Astérisque, tome 275 (2001)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2001__275__R1_0>

ASTÉRISQUE 275

FAMILIES TORSION AND MORSE FUNCTIONS

Jean-Michel Bismut
Sebastian Goette

Société Mathématique de France 2001
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J.-M. Bismut
Département de Mathématique, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay, France.
E-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr

S. Goette
Mathematisches Institut der Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen, Germany.
E-mail : sebastian.goette@uni-tuebingen.de

2000 *Mathematics Subject Classification.* — 37D15, 57R20, 58G10, 58G11.

Key words and phrases. — Morse-Smale systems. Characteristic classes and numbers. Index theory and related fixed point theories. Heat and other parabolic equation methods.

Jean-Michel Bismut was supported by Institut Universitaire de France (I.U.F.). Sebastian Goette was supported by a research fellowship of the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG).

FAMILIES TORSION AND MORSE FUNCTIONS

Jean-Michel Bismut, Sebastian Goette

Abstract. — To a flat vector bundle, one can associate odd real characteristic classes. Bismut and Lott have proved a Riemann-Roch-Grothendieck theorem for such classes, when taking the direct image of a flat vector bundle by a proper submersion. They have also constructed associated secondary invariants, the analytic torsion forms in de Rham theory. The component of degree 0 of these forms is the classical Ray-Singer torsion.

The present paper has five purposes:

- to extend the theory of analytic torsion forms to the equivariant setting.
- to give a proper normalization of these torsion forms.
- to prove rigidity formulas, showing that in positive degree, and up to locally computable terms, these forms are rigid under deformation of the flat connection.
- to evaluate the equivariant analytic torsion forms modulo coboundaries, under the assumption that there exists a fibrewise gradient vector field which verifies the Morse-Smale transversality conditions in every fibre.
- to compute the equivariant analytic torsion forms of sphere bundles associated to vector bundles.

Our main formula generalizes the results by Cheeger, Müller, Lott-Rothenberg and Bismut-Zhang on the relation of Ray-Singer torsion to Reidemeister torsion, and also computations by Bunke for sphere bundles.

***Résumé* (Torsion en famille et fonctions de Morse). —** À un fibré plat, on peut associer des classes caractéristiques impaires réelles. Bismut et Lott ont montré un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck, quand on prend l'image directe d'un fibré plat par une submersion propre. Ils ont aussi construit des invariants secondaires, les formes de torsion analytique en théorie de de Rham, qui sont des formes paires sur la base de la fibration considérée. La composante de degré 0 de ces formes est la torsion analytique de Ray-Singer.

Le présent article a pour objet :
- d'étendre la théorie des formes de torsion analytique en situation équivariante.
- de normaliser les formes de torsion analytique.
- d'établir des résultats de rigidité, qui montrent qu'à des termes explicites calculables localement près, les formes de torsion ne varient pas par déformation de la connexion plate considérée, et ceci en degré positif.
- d'évaluer les formes de torsion analytique équivariantes, sous l'hypothèse qu'il existe un champ de gradient de Morse-Smale dans les fibres.
- d'évaluer les formes de torsion équivariantes des fibrés en sphères provenant de fibrés vectoriels.

Le résultat principal généralise des résultats obtenus par Cheeger, Müller, et Lott-Rothenberg et Bismut-Zhang sur le lien entre torsion analytique et torsion de Reidemeister, et aussi des calculs de Bunke pour des fibrés en sphères.

CONTENTS