FRÉDÉRIC LE ROUX

Homéomorphismes de surfaces théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable

Astérisque, tome 292 (2004)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__292__1_0>

ASTÉRISQUE 292

HOMÉOMORPHISMES DE SURFACES THÉORÈMES DE LA FLEUR DE LEAU-FATOU ET DE LA VARIÉTÉ STABLE

Frédéric Le Roux

Société Mathématique de France 2004
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

F. Le Roux
Université Paris Sud, Laboratoire de mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `frederic.le-roux@math.u-psud.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 37E30, 37C25.
Mots clefs. — Homéomorphisme, surface, point fixe, Brouwer, Leau-Fatou, variété stable.

HOMÉOMORPHISMES DE SURFACES THÉORÈMES DE LA FLEUR DE LEAU-FATOU ET DE LA VARIÉTÉ STABLE

Frédéric Le Roux

Résumé. — On étudie la dynamique d'un homéomorphisme de surface au voisinage d'un point fixe isolé. Si l'indice du point fixe est strictement plus grand que 1, on construit une famille de pétales autour du point fixe, alternativement attractifs et répulsifs, ce qui généralise un énoncé de dynamique holomorphe. Si l'indice est strictement plus petit que 1, on obtient une famille de branches alternativement stables et instables, ce qui généralise un énoncé de dynamique différentiable hyperbolique.

***Abstract* (Dynamics of surface homeomorphisms, topological versions of Leau-Fatou flower theorem and stable manifold theorem)**

The study of the dynamics of a surface homeomorphism in the neighbourhood of an isolated fixed point leads us to the following results. If the fixed point index is greater than 1, a family of attractive and repulsive petals is constructed, generalizing the Leau-Fatou flower theorem in complex dynamics. If the index is less than 1, we get a family of stable and unstable branches, generalizing the stable manifold theorem in differentiable hyperbolic dynamics.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Contexte. — Au tout début de l'apparition des systèmes dynamiques comme branche des mathématiques, Poincaré avait souligné l'importance des orbites périodiques comme l'un des biais par lequel il est possible d'attaquer l'étude d'un système dynamique ; depuis, une bonne partie des problèmes de dynamique consiste d'une part à chercher des orbites périodiques, d'autre part à tenter de comprendre la dynamique au voisinage d'une orbite périodique. Les résultats de dynamique locale sont souvent un préliminaire incontournable à l'étude de la dynamique globale : c'est le cas par exemple en *dynamique hyperbolique* (théorème de Hartman-Grobman, de la variété stable, étude des bifurcations locales) ou en *dynamique holomorphe* à une variable (théorèmes de linéarisation locale, théorème de la fleur de Leau-Fatou).

Problématique. — Dans ce texte, nous nous intéressons à la *dynamique topologique*, en dimension 2. Que peut-on dire de la dynamique locale d'un homéomorphisme de surface au voisinage d'un point fixe isolé ? Cette question a été abordée il y a longtemps par G. D. Birkhoff, et plus récemment par M. Brown, E. Slaminka, S. Pelikan, S. Baldwin, P. Le Calvez, J.-C. Yoccoz, S. Matsumoto ([**Bro90b, BS90, PS87, LC99, LCY97, LC03, Mat01**]). Contrairement aux catégories avec plus de structures, il n'y a aucun espoir de théorème de linéarisation locale, ce qui explique qu'il n'y ait pas eu de réponse définitive.

Un des ingrédients principal est l'indice de Lefschetz du point fixe, il permet de préciser la question initiale : quel lien y a-t-il entre l'indice et la dynamique ?

Le lien le plus simple est conséquence de la théorie des homéomorphismes de Brouwer : si l'indice est différent de 1, alors de nombreuses formes de récurrence (points périodiques, et même points non errants) sont exclues dans un voisinage du point fixe ; autrement dit, le *comportement individuel* de chaque orbite est très simple. Préciser le comportement dynamique consiste alors à essayer de dire quelque chose du *comportement collectif* des orbites.

Résultats. — Dans ce texte, on obtient des énoncés qui s'inspirent de théorèmes classiques des catégories plus structurées, le *théorème de la variété stable* en dynamique hyperbolique, et le *théorème de la fleur de Leau-Fatou* en dynamique holomorphe.

La version topologique du théorème de la variété stable concerne le cas où l'indice de Lefschetz est strictement plus petit que 1 : on prouve alors l'existence de *p branches stables* et *p branches instables locales*, cycliquement alternées autour du point fixe (où le nombre p est la différence entre 1 et l'indice).

La version topologique du théorème de la fleur de Leau-Fatou concerne le cas dual, où l'indice de Lefschetz est strictement plus grand que 1 : on montre cette fois-ci l'existence de *p pétales attractifs* et *p pétales répulsifs*, ici encore cycliquement alternés autour du point fixe (le nombre p est la différence entre l'indice et 1).

On obtient également une nouvelle preuve d'un résultat de M. Brown : l'indice du point fixe pour toute puissance non nulle de l'homéomorphisme est égal à l'indice pour h.

Stratégie et outils. — La stratégie des preuves est la suivante. Un résultat d'extension (théorème 2.1) permet de se ramener à un cadre de dynamique globale, celui d'un homéomorphisme de la sphère n'ayant que deux points fixes, notés N et S : ainsi, la quasi-totalité du texte portera en réalité sur des questions de dynamique globale. En particulier, les trois résultats de dynamique locale se déduiront rapidement d'un même théorème, que nous expliquons maintenant.

Dans le cadre global, on peut utiliser la théorie de Brouwer. Celle-ci permet la construction, en chaque point (non fixe), d'une *droite de Brouwer*, c'est-à-dire d'un arc dont les extrémités sont les points fixes (ou d'une courbe fermée simple passant par l'un des points fixes), et qui ne rencontre son image qu'aux points fixes. Le principal résultat de dynamique globale (théorème D) annonce l'existence d'une famille finie de droites de Brouwer formant le bord de structures dynamiques baptisées *croissants* et *pétales*, dont le nombre et la disposition sont reliés aux indices des points fixes N et S.

La construction des croissants et des pétales utilise principalement deux outils. D'une part, une notion d'indice entre deux droites de Brouwer disjointes, appelée *indice partiel*. D'autre part, les *décompositions en briques*, élaborées et déjà utilisées par P. Le Calvez et A. Sauzet : il s'agit d'un certain type de triangulation du complémentaire des points fixes, adaptée à la dynamique. Cette triangulation permet notamment d'évacuer une grande partie des problèmes délicats de topologie plane, et d'obtenir des preuves simples des résultats de Brouwer, en construisant par une procédure « automatique » des droites de Brouwer *simpliciales* (qui sont réunion d'arêtes de la triangulation).

La plupart des preuves ont pour décor un autre cadre de dynamique globale, celui des *homéomorphismes de Brouwer* : ce sont des homéomorphismes du plan sans point fixe. Le passage du cadre « sphère avec deux points fixes » au cadre « plan sans point fixe » s'effectue de la manière suivante : en enlevant les deux points fixes N et S, puis en passant au revêtement universel, on obtient une surface homéomorphe au plan ; on montre alors qu'il existe une seule manière « non triviale » de relever la dynamique en un homéomorphisme du plan (qui est bien sûr sans point fixe). Ceci est l'objet de la proposition 4.17, et nécessite la construction préalable d'une droite de Brouwer reliant les deux points fixes N et S. Celle-ci est obtenue par des arguments portant principalement sur la combinatoire des droites de Brouwer simpliciales.

On prouve notamment une version du théorème principal, concernant l'existence de croissants et de pétales, dans le cadre des homéomorphismes de Brouwer (théorème E). Puis on en déduit la version initiale du théorème.

Plan du texte. — Dans le premier chapitre, on énonce précisément les résultats locaux, et on illustre ces résultats et leurs limites sur des exemples. Le deuxième chapitre, très court, contient le théorème d'extension qui rattache le cadre local au cadre global. Le troisième énonce le résultat principal de dynamique globale, et construit les outils nécessaires à sa démonstration (théorie de Brouwer « classique », indice partiel, décomposition en briques). Le quatrième contient le cœur de la preuve. Enfin, le dernier chapitre applique théorème d'extension et résultat global pour récolter les résultats de dynamique locale.

Les chapitres concernant le cadre global (3 et 4) sont largement indépendants des autres chapitres.

Remerciements. — Je tiens à remercier les professeurs du Collège de France, et tout particulièrement Jean-Christophe Yoccoz, de m'avoir invité, en janvier 2001, à faire la série d'exposés qui m'a incité à écrire ce texte. Cette étude a pour origine le premier sujet de thèse que m'avait donné Lucien Guillou, à l'époque sans beaucoup de succès... Le sujet a redémarré après plusieurs discussions avec Patrice Le Calvez, en particulier grâce à sa suggestion d'utiliser les « décompositions en briques », qui jouent ici un rôle central. Je remercie Lucien et Patrice pour leur intérêt constant pour ce travail. Ce texte a également bénéficié des conversations avec François Béguin, Sylvain Crovisier, Vincent Guirardel et Duncan Sands.